Neg. L. Ricci — *Fotocalcografia Fusetti*

OPERE MATEMATICHE

DI

FRANCESCO BRIOSCHI.

OPERE MATEMATICHE

DI

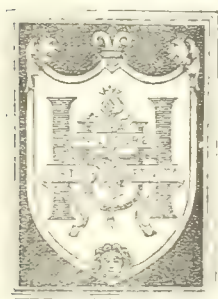
FRANCESCO BRIOSCHI

PUBBLICATE

PER CURA DEL *COMITATO PER LE ONORANZE A FRANCESCO BRIOSCHI*

(G. ASCOLI, E. BELTRAMI, G. COLOMBO, L. CREMONA, G. NEGRI, G. SCHIAPARELLI).

TOMO PRIMO

CON RITRATTO DI F. BRIOSCHI.

ULRICO HOEPLI

EDITORE-LIBRAJO DELLA REAL CASA

MILANO

PREFAZIONE

ALLE

OPERE MATEMATICHE DI FRANCESCO BRIOSCHI.

Ai Lettori,

Non appena si spense la vita di Francesco Brioschi, i professori del R. Istituto tecnico superiore, da lui fondato e diretto dal 1862 sino al giorno della sua morte, e numerosissimi allievi, amici e ammiratori dell'illustre scienziato, costituita una Commissione raccoglitrice, apersero una pubblica sottoscrizione per onorarne degnamente la memoria.

Raccoltasi in brevissimo tempo una somma cospicua, i sottoscrittori la affidarono a un Comitato, col mandato di erogarla in quei modi che credesse meglio atti a onorare e ricordare ai posteri il nome di Francesco Brioschi. A comporre il Comitato furono chiamati i Senatori Graziadio Ascoli, Eugenio Beltrami, Giuseppe Colombo, Luigi Cremona, Gaetano Negri e Giovanni Schiaparelli.

Il Comitato stabilì di destinare una parte della somma disponibile a erigere una statua di bronzo del grande matematico nello stesso Istituto che fu creazione sua, e a collocare due lapidi presso l'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e il Collegio degli Ingegneri di Milano; un'altra parte fu destinata all'acquisto della sua biblioteca; e la restante parte si volle erogare nella pubblicazione di tutte le sue opere matematiche.

Poichè i numerosi scritti matematici di Francesco Brioschi trovansi sparsi in diversi periodici scientifici, parve al Comitato che potesse essere di grande utilità per gli studii matematici la loro riunione in una pubblicazione unica. A quest'uopo il Comitato delegò ai professori Beltrami e

CREMONA la cura di raccogliere gli scritti, di ordinarli e di provvedere alla loro revisione, col concorso di amici volenterosi, ai quali si rendono quì vivissime grazie. Sino ad oggi il materiale predisposto è quello dei primi due tomi, e revisori sono stati i professori CERRUTI, BIANCHI, CAPELLI, GERBALDI, LORIA, PASCAL, PITTARELLI, REINA e TONELLI. Il professore GERBALDI ha inoltre fatto la seconda e definitiva revisione precedente la stampa.

Avendo la morte rapito immaturamente alla scienza il Senatore EUGENIO BELTRAMI, il Comitato lo sostituì col Prof. VALENTINO CERRUTI, che porterà l'opera sua nella direzione generale della pubblicazione; e per render questa più sollecita affidò al Prof. ERNESTO PASCAL l'incarico di raccogliere e ordinare il rimanente materiale e di fare la prima revisione, mentre il Prof. GERBALDI continuerà ad attendere all'ultima revisione prima della tiratura.

L'edizione è stata assunta dal Comm. ULRICO HOEPLI e la stampa dalla Tipografia Matematica di Palermo.

L'ordine col quale fu iniziata la pubblicazione non è nè l'ordine cronologico, nè l'ordine per materie; si è stabilito, invece, di disporre le memorie per serie, secondo i periodici nei quali vennero pubblicate, cominciando da quelle, che sono le più numerose, pubblicate negli Annali di Scienze Matematiche e Fisiche compilati da BARNABA TORTOLINI, e poi negli Annali di Matematica pura ed applicata, che ne furono la continuazione. Alla fine dell'opera intera si provvederà poi a dare i necessari indici per classificare le memorie in ordine di tempo e di argomento, accompagnandoli con uno studio sulla vita scientifica dell'Autore.

Con questa pubblicazione il Comitato crede di avere bene interpretato il pensiero dei sottoscrittori, sicuro che la raccolta degli scritti di FRANCESCO BRIOSCHI rimarrà il monumento più degno alla memoria sua.

Milano, marzo 1901.

Il Presidente del Comitato
per le onoranze a Francesco Brioschi:

G. Colombo.

INDICE DEL TOMO I.

---

*) Di questa raccolta furono pubblicati [illegible] volumi [tomi I-VIII ([illegible])] col titolo « Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, compilati da Barnaba Tortolini, prof. di Calcolo sublime all'Università Romana, etc. — Roma, Tipografia delle « Belle Arti » (in-8°).

I.

INTORNO LA INTEGRAZIONE DI UNA EQUAZIONE ALLE DERIVATE DEL SECOND'ORDINE.

Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, tomo II ([illegible]).

Nel volume V (1850), p. 180, del « Cambridge and Dublin Mathematical Journal » il sig. Malmstén ha enunciato il seguente teorema:

« Affinchè l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{r}{x} \frac{d y}{d x} = \left(b x^m + \frac{s}{x^2} \right) y \tag{1}$$

« sia integrabile col mezzo di quadrature indefinite relative ad x, è necessario e sufficiente che fra r, m, s abbia luogo la relazione:

$$m + 2 = \pm \frac{2\sqrt{(1-r)^2 + 4s}}{2n+1},$$

« essendo n un numero intero qualunque o zero » *).

La dimostrazione di questo teorema modificato come conviensi, e la ricerca dell'integrale completo dell'equazione (1), formano lo scopo di questa Nota.

Pongasi nelle equazioni (1) in luogo di y la frazione $\frac{z}{x^{\frac{r}{2}}}$; dopo alcune riduzioni

*) In una appendice aggiunta dal sig. Malmstén ad una sua memoria stampata nel « Journal für die reine und angewandte Mathematik », t. XXXIX (1850), pp. 108-115, trovasi (pp. 114-115) una dimostrazione di questo teorema.

otterremo la

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left[\frac{\frac{r}{2}\left(\frac{r}{2} - 1\right) + s}{x^2} + b\,x^m\right] z;$$

quindi facciasi in quest'ultima $z = x^\alpha u$, ed avremo:

$$x^\alpha \frac{d^2 u}{d x^2} + 2\,\alpha\, x^{\alpha - 1} \frac{d\,u}{d\,x} + \alpha(\alpha - 1) x^{\alpha - 2} u = \left[\frac{\frac{r}{2}\left(\frac{r}{2} - 1\right) + s}{x^2} + b\,x^m\right] x^\alpha u.$$

Alla variabile indipendente x sostituiscasi un'altra variabile legata colla prima dalla equazione $x = t^c$; otterremo dopo varie riduzioni:

$$\frac{d^2 u}{d t^2} - \frac{1}{t}\left[(1 - 2\,\alpha) c - 1\right] \frac{d\,u}{d\,t} + \frac{c^2}{t^2}\left[\alpha(\alpha - 1) - a\right] u = b\,c^2\, t^{(m+2)c-2} u,$$

dove

$$a = \frac{r}{2}\left(\frac{r}{2} - 1\right) + s.$$

L'arbitrarietà in cui ci troviamo rispetto alla determinazione delle α, c possiamo renderla utile giovandoci di essa a semplificare la equazione superiore; facciamo a quest'uopo:

$$(1 - 2\,\alpha) c - 1 = 0, \qquad (m + 2) c - 2 = 0,$$

ossia

$$c = \frac{2}{m + 2}, \qquad \alpha = -\frac{m}{4};$$

e quella equazione si ridurrà alla

$$\frac{d^2 u}{d t^2} = \left(A + \frac{B}{t^2}\right) u, \tag{2}$$

essendo

$$A = b\left(\frac{2}{m + 2}\right)^2, \qquad B = \left(\frac{2}{m + 2}\right)^2 \left[a - \frac{m(m + 4)}{16}\right].$$

Ora il sig. LIOUVILLE ha dimostrato *), che una equazione della forma della (2) nella quale la costante A sia essenzialmente differente dallo zero, potrà essere soddisfatta prendendo per u una funzione di t esprimibile per mezzo di un numero limitato di simboli algebrici, esponenziali, e logaritmici; e di simboli indicanti integrazioni indefinite relative alla variabile t ogni qualvolta B sia della forma $n(n + 1)$, essendo n un numero intero nullo o positivo.

Dunque la condizione necessaria e sufficiente perchè l'integrale completo della equa-

*) Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. VI (1841), p. 13

zione (1) possa esprimersi col mezzo di un numero finito dei simboli suindicati, ed anzi col mezzo di soli simboli algebrici ed esponenziali, sarà che

$$\left(\frac{2}{m+2}\right)^2\left[\frac{r}{2}\left(\frac{r}{2}-1\right)+s-\frac{m(m+4)}{16}\right]=n(n+1);$$

da cui si ha facilmente

$$m+2=\pm\frac{2\sqrt{(1-r)^2+4s}}{2n+1}. \tag{3}$$

Questa dà appunto il teorema di MALMSTÉN; la modificazione di cui abbiamo accennato consiste nel dover essere n numero intero nullo o positivo, non già intero qualunque.

Dalla equazione proposta si hanno, ponendo r ed s eguali a zero, od s ed m nulle, le due seguenti:

$$\frac{d^2 y}{d x^2}=b x^m y, \qquad \frac{d^2 y}{d x^2}+\frac{r}{x}\frac{d y}{d x}=b y.$$

La prima di queste è la equazione del RICCATI trasformata col metodo di EULERO, e la formola (3) ne dà tosto il conosciuto criterio $m=-\frac{4n}{2n\pm 1}$ (n intero nullo o positivo). La seconda, nota anch'essa, può integrarsi mediante integrazioni indefinite ogni qualvolta r sia un numero pari positivo o negativo *).

Allorquando sia la sola $s=0$, cioè per la equazione

$$\frac{d^2 y}{d x^2}+\frac{r}{x}\frac{d y}{d x}=b x^m y,$$

avremo per condizione di integrabilità coi mezzi sopra indicati:

$$m=-\frac{4(n\pm\frac{1}{2}r)}{2n\pm 1};$$

e per $s=r$, ossia per la equazione

$$\frac{d^2 y}{d x^2}+\frac{r}{x}\frac{d y}{d x}=\left(b x^m+\frac{r}{x^2}\right)y,$$

dovrà essere

$$m=-\frac{4(n\pm\frac{1}{2}r)}{2n\mp 1}.$$

Per $r=1$, $s=i^2$, $b=-i^2$, $m=0$, o per la equazione

$$x^2\frac{d^2 y}{d x^2}+x\frac{d y}{d x}-i^2(1-x^2)y=0,$$

*) Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. IX (1844), p. 193; t. XI (1846), p. 340.

la quale riscontrasi nella ricerca del noto integrale definito *)

$$\int_0^{\pi} \cos i(u - x \operatorname{sen} u)\, d u,$$

la formola (3) dà

$$i = \pm \left(n + \tfrac{1}{2}\right).$$

Il metodo proposto dal sig. LIOUVILLE per la integrazione delle equazioni giovandosi delle derivate ad indice qualunque è in difetto in alcuni casi particolari **). La prima equazione cui il sig. LIOUVILLE applica il suo metodo è la

$$(4) \qquad (m x^2 + n x + p)\frac{d^2 y}{d x^2} + (q x + r)\frac{d y}{d x} + b y = 0,$$

e l'essenza del metodo stesso consiste nel porre la y eguale alla derivata ad indice μ di una quantità z; la qual μ viene poi ad essere determinata in modo che soddisfi alla equazione

$$m \mu(\mu + 1) - q \mu + b = 0.$$

Se ora supponesi $m = 0$, $q = 0$, $n = 1$, $p = 0$, il metodo del sig. LIOUVILLE evidentemente non è più applicabile, e la (4) riducesi alla

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{r}{x}\frac{d y}{d x} + \frac{b}{x} y = 0,$$

la quale è un caso particolare della (1), ed il criterio per la integrabilità di esse che ottiensi dalla (3) ponendo $m = -1$, $s = 0$ risulta $r = \pm \left(n \pm \tfrac{1}{2}\right)$.

La seconda equazione considerata dal sig. LIOUVILLE è la

$$\left(\frac{m}{x} + \frac{n}{x^2}\right)\frac{d^2 y}{d x^2} + \left(\frac{r}{x^2} + \frac{q}{x^3}\right)\frac{d y}{d x} + \frac{b}{x^4} y = 0,$$

la quale riducesi facilmente alla forma della (4) ponendo $x = \frac{1}{u}$; e quindi si integra collo stesso metodo. Il caso particolare di $n = 0$, $q = 0$ si sottrae anch'esso al metodo generale; se ponesi inoltre $m = 1$, si ha la

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{r}{x}\frac{d y}{d x} + \frac{b}{x^3} y = 0,$$

che ricavasi dalla (1) ponendo $m = -3$, $s = 0$; e la condizione per la integrabilità è in questo caso $r = \pm \left(n \pm \tfrac{1}{2}\right)$.

La integrazione dell'equazione (1), e quindi quella di ciascuna delle altre che abbiamo sopra richiamate come casi particolari della medesima, si può far dipendere,

*) Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. VI (1841), p. 36.

**) Journal de l'École Polytechnique, t. XIII (1832), cahier 21, pp. 163, 185.

dietro quanto abbiamo veduto, dalla integrazione dell'equazione (2). Quest'ultima pel caso di $B = n(n+1)$ (n numero intero nullo o positivo) fu già scopo alle ricerche di sommi geometri, come una fra quelle che presentansi in differenti problemi di meccanica celeste e di fisica matematica. LEGENDRE pel primo, nelle sue ricerche intorno le densità degli strati dello sferoide terrestre, diede senza dimostrazione l'integrale completo di quella equazione *); scoperta alla quale accrebbe importanza l'applicazione che ne fece LAPLACE nella sua memoria sulla diminuzione della durata del giorno pel raffreddamento della terra **). PLANA e POISSON verificarono il risultato di LEGENDRE seguendo vie affatto differenti ***).

Posto $A = h^2$, $B = n(n+1)$, l'integrale completo della (2) è

$$u = (\alpha e^{ht} + \beta e^{-ht}) P - h(\alpha e^{ht} - \beta e^{-ht}) Q,$$

nella quale

$$P = \frac{1}{t^n} + \frac{n-1}{2n-1} \frac{h^2}{t^{n-2}} + \frac{(n-2)(n-3)}{2.3(2n-1)(2n-3)} \frac{h^4}{t^{n-4}} + \dots$$

$$Q = \frac{1}{t^{n-1}} + \frac{n-2}{3(2n-1)} \frac{h^2}{t^{n-3}} + \frac{(n-3)(n-4)}{2.3.5(2n-1)(2n-3)} \frac{h^4}{t^{n-5}} + \dots$$

e le α, β sono le due costanti arbitrarie. Evidentemente essendo l'n intero, quel valore di u consterà di un numero finito di termini; la dimostrazione poi del sig. PLANA come quella di POISSON includono che la n sia inoltre positiva o nulla. Avendo fatto

$$x = t^{[illegible]}, \qquad z = x^2 u, \qquad y = \frac{z}{x^{[illegible]}},$$

avremo reciprocamente, rammentati i valori di c ed x,

$$t = x^{\frac{m+2}{2}}, \qquad u = y x^{[illegible]}:$$

talchè sostituendo si otterrà:

$$y x^{[illegible]} = (\alpha e^{[illegible]} + \beta e^{[illegible]}) P - [illegible] (\alpha e^{[illegible]} - \beta e^{[illegible]}) Q:$$

la quale, purchè si ritenga

$$h = \frac{2}{m+2} \sqrt{b}, \qquad n = -\frac{1}{2} [illegible] \frac{[illegible]}{m+2},$$

rappresenta l'integrale completo dell'equazione (1).

Pavia, li 20 agosto 1851.

[G., Tn.].

---

*) Mémoires de l'Académie des Sciences, année [illegible], p. [illegible].

**) Connaissance des temps pour l'an 1823, p. 245.

***) Memorie dell'Accademia di Torino, t. XXVI (1821), p. 519. — Journal de l'École Polytechnique, t. XII (1823), p. 216. — Traité de Mécanique [illegible] [illegible], pp. [illegible].

II.

SULLE EQUAZIONI ALLE DERIVATE ORDINARIE E LINEARI.

(Lettera al prof. B. Tortolini.)

Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, [illegible] III [illegible].

Signor Professore,

Le osservazioni dirette dal prof. Mainardi a V. S. e pubblicate nel fascicolo del marzo 1852 di questo giornale *), vertendo fra le altre cose intorno ad un teorema del sig. Malmstén dimostrato dal sig. Tardy **), mi determinarono a comunicarle le seguenti considerazioni sull'argomento.

È noto che, data la equazione alle derivate ordinarie dell'ordine n e lineare

$$(1)\qquad y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + A_2 y^{(n-2)} + \ldots + A_{n-1} y' + A_n y = X,$$

nella quale siano A_1, A_2, ... A_n, X funzioni qualsivogliano della x, se si conoscono r integrali particolari della equazione che si ottiene ponendo $X = 0$ nella superiore, la integrazione della medesima può farsi dipendere da quella di una equazione dell'ordine $n - r$. Questa importante proposizione venne data la prima volta dal sommo Lagrange nel tomo III della « Miscellanea Taurinensia », e da essa l'autore dedusse quale corollario, che allorquando sarà $r = n - 1$ si potrà sempre ottenere l'integrale

*) Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, t. III (1852), p. 143.

**) The Cambridge and Dublin Mathematical Journal, vol. IV ([illegible]), p. 286. — Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. XXXIX (1850), p. 91. — Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, t. I (1850), p. 136.

della equazione *). CONDORCET, LAPLACE ed il medesimo LAGRANGE **) ridimostrarono in seguito quel teorema, e lo estesero alle equazioni lineari alle differenze finite.

Ora il teorema del prof. MALMSTÉN è un caso particolare di questo; dall'uso dei determinanti trasse il vantaggio di poter assegnare la *forma* dell'integrale completo dell'equazione (1), supposto però $X = 0$, e conosciuti $n - 1$ integrali particolari dell'equazione medesima. Ma, nelle sue lezioni di calcolo sublime ***), il prof. BORDONI dimostrando la proposizione di LAGRANGE, col metodo della variazione delle costanti arbitrarie, assegna quella *forma* pel caso generale in cui si consideri la equazione (1), e sieno noti soli $n - r$ integrali particolari. La espressione cui si giungerebbe ponendo

$$X = 0, \qquad r = n - 1$$

in questo risultato non riproduce esattamente la formola del prof. MALMSTÉN, ma col mezzo di una lieve modificazione fatta alla dimostrazione del prof. BORDONI ottiensi anche quella coincidenza; come vengo brevemente a provare.

Sieno $y_1, y_2, \ldots y_r$ r integrali particolari dell'equazione (1), supposto $X = 0$, e si indichino con $Y_1, Y_2 \ldots Y_r$ r funzioni incognite della x. Pongo

$$P_{m,s} = y_1^{(m)} Y_1^{(s)} + y_2^{(m)} Y_2^{(s)} + \ldots + y_r^{(m)} Y_r^{(s)}$$

ed

$$y = P_{0,0} = y_1 Y_1 + y_2 Y_2 + \ldots + y_r Y_r,$$

e si stabiliscano le r equazioni

$$P_{0,1} = 0, \quad P_{1,1} = 0, \quad P_{2,1} = 0, \ldots P_{r-2,1} = 0, \quad P_{r-1,1} = \zeta.$$

Denotando con Δ il determinante delle r^2 quantità

$$\begin{array}{llll} y_1, & y_2, & \ldots & y_r \\ y_1', & y_2', & \ldots & y_r' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(r-1)}, & y_2^{(r-1)}, & \ldots & y_r^{(r-1)}, \end{array}$$

dalle equazioni superiori si avranno le

$$(2) \qquad Y_1' = \frac{\partial \Delta}{\partial y_1^{(r-1)}} \frac{\zeta}{\Delta}, \quad Y_2' = \frac{\partial \Delta}{\partial y_2^{(r-1)}} \frac{\zeta}{\Delta}, \ldots Y_r' = \frac{\partial \Delta}{\partial y_r^{(r-1)}} \frac{\zeta}{\Delta}.$$

*) *Solution de différents problèmes de calcul intégral.* [Mélanges de Philosophie et de Mathématique de la Société Royale de Turin, t. III (17[illegible]), p. II, pp. 179-380].

**) Mélanges de Philosophie et de Mathématique de la Société Royale de Turin, t. IV. — Mémoires de l'Académie de Berlin, année 1775. — *Théorie des fonctions analytiques*, p. 86.

***) *Lezioni di Calcolo sublime* del prof. ANTONIO BORDONI, Milano, 1831, t. II, p. 80. Sono da notarsi quelle funzioni indicate colle $\zeta_1 - \mu$, le quali sono determinanti delle primitive particolari e delle loro derivate.

Dalla $y = P_{0.0}$ si ricavino i valori delle $y', y'', \dots y^{(n)}$ e postili nella (1), avendo riguardo all'equazione identica

$$P_{n,0} + A_1 P_{n-1,0} + A_2 P_{n-2,0} + \dots + A_{n-1} P_{1,0} + A_n P_{0,0} = 0,$$

si otterrà la

$$(3)\quad \left\{ \begin{array}{l} k P_{n-1,1} + \frac{k(k-1)}{2} P_{n-2,2} + \dots + k P_{r+1,k-1} + P_{r,k} \\ + z^{(k)} + A_1 [(k-1) P_{n-2,1} + \dots + z^{(k-1)}] + \dots + A_{n-r} z = X, \end{array} \right. \qquad (k = n - r)$$

la quale è alle derivate in z e dell'ordine $n-r$. Suppongasi trovata la primitiva completa di quest'ultima equazione, e si abbia $z = Z$; per le equazioni (2) la primitiva completa della (1) sarà:

$$y = y_1 \int \frac{\partial \Delta}{\partial y_1^{(r-1)}} \frac{Z}{\Delta} dx + y_2 \int \frac{\partial \Delta}{\partial y_2^{(r-1)}} \frac{Z}{\Delta} dx + \dots + y_r \int \frac{\partial \Delta}{\partial y_r^{(r-1)}} \frac{Z}{\Delta} dx,$$

contenendo essa n costanti arbitrarie. Se $r = n - 1$, la (3) si muta nella

$$P_{n-1,1} + z' + A_1 z = X,$$

ossia

$$(\Delta z)' + A_1 \Delta z = X \Delta,$$

dalla quale

$$z = \frac{e^{-\int A_1 dx}}{\Delta} \int e^{\int A_1 dx} X \Delta \, dx,$$

e quindi l'integrale completo della (1) sarà in questo caso:

$$y = y_1 \int \frac{\partial \Delta}{\partial y_1^{(n-2)}} \frac{e^{-\int A_1 dx}}{\Delta^2} \int e^{\int A_1 dx} X \Delta \, dx + \text{ecc.} \quad {}^{*})$$

e supposto $X = 0$:

$$y = C_1 y_1 \int \frac{\partial R}{\partial y_1^{(n-2)}} e^{-\int A_1 dx} dx + \dots + C_{n-1} y_{n-1} \int \frac{\partial R}{\partial y_{n-1}^{(n-2)}} e^{-\int A_1 dx} dx,$$

dove $R = \frac{1}{\Delta}$; la quale è la formola del MALMSTÉN. È evidente come lo stesso metodo possa applicarsi alle equazioni alle differenze finite lineari.

Il prof. MAINARDI nello scritto dianzi citato fa riflettere l'importanza di una scrupolosa esattezza nelle citazioni, ed a questo proposito richiama una memoria del MONGE nella quale dovrebbero essere discusse per lo meno le proposizioni fondamentali sulle linee e sulle superficie parallele, essendo questo l'argomento del lavoro che V. S. ha pubblicato nelle prime pagine degli Annali. La storia delle scienze speculative abbonda

*) Questa formola venne recentemente trovata anche dal sig. JOACHIMSTHAL ma in modo affatto differente. Parmi che il metodo della variazione delle costanti arbitrarie debba preferirsi a quel metodo fondato sull'analogia.

di fatti nei quali alcune idee sparse qua e là nelle opere di un autore sono bastevoli ad aprire ad altri la strada di nuove teorie. Ma nel nostro caso particolare la fonte di quelle prime idee secondo il prof. MAINARDI venne dimenticata; non sarebbe bene che V. S. o chi altri avesse fatto lunghi studj in quella parte d'analisi applicata rendesse noto con qualche dettaglio ove si possa rintracciarla?

Pavia, 10 maggio 1852.

[Tn.].

III.

SOPRA IL PRODOTTO RECIPROCO DEI RAGGI DI CURVATURA DI UNA SUPERFICIE.

(Lettera al prof. B. Tortolini).

Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, t. III [illegible]

Signor Professore,

Essendomi in questi giorni occupato di alcune proprietà dei determinanti, mi accorsi come dal noto teorema per la moltiplicazione dei medesimi si possa facilmente dedurre l'espressione data da Gauss per il prodotto reciproco dei raggi di curvatura. Ecco brevemente come vi si giunge.

Poste le nove equazioni:

$$\omega = a\alpha + b\beta + c\gamma, \qquad \omega_1 = a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1, \qquad \omega_2 = a\alpha_2 + b\beta_2 + c\gamma_2,$$
$$\theta = a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma, \qquad \theta_1 = a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1, \qquad \theta_2 = a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2,$$
$$\rho = a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma, \qquad \rho_1 = a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1, \qquad \rho_2 = a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2,$$

il teorema della moltiplicazione dei determinanti dà

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega & \omega_1 & \omega_2 \\ \theta & \theta_1 & \theta_2 \\ \rho & \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix},$$

e poste le sei equazioni:

$$s = a^2 + b^2 + c^2, \qquad s_1 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2, \qquad s_2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2,$$
$$\sigma = aa_1 + bb_1 + cc_1, \qquad \sigma_1 = aa_2 + bb_2 + cc_2, \qquad \sigma_2 = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2,$$

dal teorema medesimo risulta:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} s & \sigma & \sigma_1 \\ \sigma & s_1 & \sigma_2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & s_2 \end{vmatrix}.$$

Ora la espressione pel prodotto reciproco dei raggi di curvatura vien data dalla equazione:

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{D D_2 - D_1^2}{(E G - F^2)^2},$$

essendo

$$D = A x'' + B y'' + C z'', \quad D_1 = A x'_{,} + B y'_{,} + C z'_{,}, \quad D_2 = A x_{,,} + B y_{,,} + C z_{,,},$$

$$A = y' z_{,} - y_{,} z', \qquad B = z' x_{,} - x' z_{,}, \qquad C = x' y_{,} - x_{,} y',$$

$$E = x'^2 + y'^2 + z'^2, \qquad G = x_{,}^2 + y_{,}^2 + z_{,}^2, \qquad F = x' x_{,} + y' y_{,} + z' z_{,},$$

gli accenti in alto ed in basso apposti alle x, y, z indicando derivate prese ordinatamente rispetto a due variabili u, v, delle quali sono noti i significati.

Dalla definizione del determinante si ha:

$$D = \begin{vmatrix} x'' & y'' & z'' \\ x' & y' & z' \\ x_{,} & y_{,} & z_{,} \end{vmatrix}, \qquad D_1 = \begin{vmatrix} x'_{,} & y'_{,} & z'_{,} \\ x' & y' & z' \\ x_{,} & y_{,} & z_{,} \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} x_{,,} & y_{,,} & z_{,,} \\ x' & y' & z' \\ x_{,} & y_{,} & z_{,} \end{vmatrix};$$

per cui osservando essere

$$\tfrac{1}{2} E' = x' x'' + y' y'' + z' z'', \qquad F' - \tfrac{1}{2} E_{,} = x_{,} x'' + y_{,} y'' + z_{,} z'',$$

$$F_{,} - \tfrac{1}{2} G' = x' x_{,,} + y' y_{,,} + z' z_{,,}, \quad E = x'^2 + y'^2 + z'^2, \quad F = x' x_{,} + y' y_{,} + z' z_{,},$$

$$\tfrac{1}{2} G_{,} = x_{,} x_{,,} + y_{,} y_{,,} + z_{,} z_{,,}, \quad F = x_{,} x' + y_{,} y' + z_{,} z', \quad G = x_{,}^2 + y_{,}^2 + z_{,}^2;$$

ed aggiungendo alle prime due equazioni la

$$p = x'' x_{,,} + y'' y_{,,} + z'' z_{,,},$$

si avrà per la prima delle formole generali esposte sopra, dedotta dal teorema della moltiplicazione:

$$(1) \qquad D D_2 = \begin{vmatrix} p & \tfrac{1}{2} E' & F' - \tfrac{1}{2} E_{,} \\ F_{,} - \tfrac{1}{2} G' & E & F \\ \tfrac{1}{2} G_{,} & F & G \end{vmatrix}.$$

Inoltre, per le sei equazioni

$$q = x'^2_{,} + y'^2_{,} + z'^2_{,}, \quad E = x'^2 + y'^2 + z'^2, \quad G = x_{,}^2 + y_{,}^2 + z_{,}^2,$$

$$\tfrac{1}{2} E_{,} = x' x'_{,} + y' y'_{,} + z' z'_{,}, \quad \tfrac{1}{2} G' = x_{,} x'_{,} + y_{,} y'_{,} + z_{,} z'_{,}, \quad F = x' x_{,} + y' y_{,} + z' z_{,},$$

e per la seconda delle esposte formole:

$$(2) \qquad D_1^2 = \begin{vmatrix} q & \tfrac{1}{2} E_{,} & \tfrac{1}{2} G' \\ \tfrac{1}{2} E_{,} & E & F \\ \tfrac{1}{2} G' & F & G \end{vmatrix}.$$

Formando la differenza $D D_2 - D_1^2$, sviluppando i determinanti secondi membri delle (1), (2), ed osservando che al binomio $p - q$ che riscontrasi in questa differenza si può sostituire il trinomio $-\frac{1}{2} E_{,,} - \frac{1}{2} G'' + F'_{,}$, si ottiene la nota formola di Gauss.

[illegible]

[R.].

IV.

INTORNO AD ALCUNI PUNTI DELLA TEORICA DELLE SUPERFICIE.

Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, [illegible] III [illegible]

1. Una superficie flessibile dicesi essere inestensibile, allorquando il valore delle derivate dell'arco di una linea qualsivoglia esistente in essa non muta, qualunque sia la forma che la superficie può assumere attesa la sua flessibilità.

Teorema. — « Se una superficie flessibile è anche inestensibile, il prodotto dei raggi « di curvatura corrispondenti ad un punto qualunque di essa superficie, *rimane costante* « *per quel punto*, qualunque sia la forma che può assumere la superficie ».

Esistono varie dimostrazioni di questo teorema dovuto al sig. Gauss, ed i metodi usati per esse distinguonsi in due classi. In alcune, cioè in quelle dei signori Gauss, Liouville, Chelini *), la espressione del prodotto dei raggi di curvatura corrispondenti ad un punto qualsivoglia della superficie viene effettivamente trovato, e si deduce il teorema dalla considerazione dei termini componenti la espressione medesima. In altre, come in quelle dei signori Bertrand, Diguet, Puiseux **), la proprietà che serve di definizione alle superficie flessibili ed inestensibili viene sostituita da un'altra, della quale il teorema è conseguenza immediata. Questi ultimi metodi di dimostrazione hanno il vantaggio della brevità al confronto dei primi, ma poggiando sopra definizioni per la inestensibilità delle superficie flessibili meno generali di quelle esposte di sopra, condu-

---

*) Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas* [Atti della Reale Società di Gottinga, vol. VI (1828)].—Liouville [Journal de Mathématiques pures et appliquées, tome XII (1847), p. 291].—Chelini [Giornale Arcadico di Roma, vol. CXV [illegible], p. [illegible]; vol. CXVI [illegible], p. [illegible]].

**) Journal de Mathématiques pures et appliquées, tome XIII (1848), pp. 80, 83, 87.

cono, al dir degli stessi autori, a teoremi i quali sono casi particolari di quello del sig. Gauss.

Nella dimostrazione che qui proponiamo, è scopo principale il restituire al teorema la sua generalità, non perdendo il vantaggio della brevità dovuta al metodo indiretto.

2. Indicando con s la lunghezza dell'arco di una linea qualunque esistente in una superficie, e considerando le x, y, z coordinate di un punto qualsivoglia di quella linea quali funzioni di due quantità u, v, è noto essere

$$s' = \sqrt{E u'^2 + 2 F u' v' + G v'^2},$$

nella quale le s', u', v' indicano le derivate delle s, u, v, rispetto ad una medesima variabile, e le E, F, G rappresentano rispettivamente i trinomj:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \qquad \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

Ritenuto che le u, v rimanghino costanti mutando la forma della superficie cui appartiene la linea considerata, analiticamente si dirà una superficie flessibile essere inestensibile, quando per tutte le variazioni che ponno accadere nella forma della superficie medesima non mutino di valore le quantità E, F, G.

Siano ora p, q, r le coordinate di un punto qualunque di una superficie sferica di raggio n, e sia $p^2 + q^2 + r^2 = n^2$ la equazione che la rappresenta; si avrà:

$$(1) \qquad n \int_{-n}^{n} dp \int_{-\varphi(p)}^{\varphi(p)} dq \frac{1}{\sqrt{n^2 - p^2 - q^2}} = 2\pi n^2,$$

dove $\varphi(p) = \sqrt{n^2 - p^2}$. Si immagini una superficie qualunque flessibile ed inestensibile, e si supponga condotto nella sfera il raggio parallelo alla normale corrispondente al punto di coordinate x, y, z della superficie immaginata. Fra le p, q, r, e le x, y, z si avranno evidentemente le relazioni:

$$p = -n \frac{z'}{\sqrt{1 + z'^2 + z_{,}^2}}, \qquad q = -n \frac{z_{,}}{\sqrt{1 + z'^2 + z_{,}^2}}, \qquad r = n \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2 + z_{,}^2}},$$

essendo $z' = \frac{\partial z}{\partial x}$, $z_{,} = \frac{\partial z}{\partial y}$. Assumendo le x, y quali nuove variabili avremo, dalla nota formola di trasformazione per gli integrali duplicati, che la espressione

$$n^2 \int dx \int dy \frac{z'' z_{,,} - z_{,}'^2}{\sqrt{(1 + z'^2 + z_{,}^2)^3}}$$

rappresenterà l'area di una porzione indeterminata di superficie sferica, e di più se dopo eseguita ciascuna integrazione porremo in luogo delle x, y, z i loro valori formati colle

p, q, r ed estenderemo le primitive ottenute fra i limiti assegnati per l'integrale doppio (1), il valore risultante sarà $2\pi n^2$. Ma quest'ultima espressione è identica alla

$$(2)\qquad n^2 \int dx \int dy \frac{\sqrt{1 + \zeta'^2 + \zeta_1'^2}}{R_1 R_2},$$

essendo R_1, R_2 i raggi di curvatura della superficie immaginata corrispondenti al punto di coordinate x, y, z. E la (2), assunte le nuove variabili u, v, eguaglia la

$$(3)\qquad n^2 \int du \int dv \frac{\sqrt{EG - F^2}}{R_1 R_2};$$

talchè questa espressione, quando le primitive vengano estese nel modo dichiarato fra i limiti su accennati, sarà eguale a $2\pi n^2$. Ora per le superficie immaginate le E, F, G, u, v non mutano qualunque forma assuma la medesima; e siccome il valore di quella primitiva duplicata, purchè i limiti sieno gl'indicati, è eguale a 2π, quantità costante, ne risulta che dovrà pure rimanere costante il prodotto $R_1 R_2$ in tutti i cambiamenti di forma che può subire la superficie immaginata.

3. È noto che le x, y, z, coordinate di un punto qualunque di una superficie, si ponno ritenere funzioni di due nuove variabili u, v allorquando si considerino queste quali parametri, l'una di una superficie, l'altra di una seconda, e la posizione di ogni punto della superficie data ritengasi individuata dalla comune intersezione di due linee, l'una appartenente al sistema di linee comuni intersezioni della superficie data e della prima superficie immaginata, la quale muta posizione e dimensione al variare del parametro u, l'altra appartenente al sistema di linee comuni intersezioni della superficie data e della seconda superficie immaginata, la quale cambia posizione e dimensioni cambiando di valore il parametro v. Siccome poi per i punti della prima delle linee contemplate la v rimane costante, ed analoga proprietà ha la u pei punti della seconda, quelle linee saranno rappresentate colle equazioni:

$$v = \text{cost.}, \qquad u = \text{cost.}$$

Il sig. Gauss giunse, nella memoria citata, a trovare la espressione per la reciproca del prodotto dei raggi di curvatura corrispondenti ad un punto qualunque di una superficie supponendo essere qualsivogliano le linee $v = \text{cost.}$, $u = \text{cost.}$; e da esse ricavò come casi particolari le espressioni analoghe: 1° nella supposizione che le linee rappresentabili dalle $v = \text{cost.}$, $u = \text{cost.}$ sieno ortogonali, 2° nelle ipotesi che una di esse linee sia una geodetica della superficie. Le medesime espressioni si ponno scrivere sotto forme più concise di quelle assegnate loro dal sig. Gauss, e sotto queste ultime forme vennero appunto recentemente enunciate dal sig. Liouville *), e ritrovate dal sig. Che-

*) Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XXXII (1851), p. 533.

LINI *). Vogliamo ora farci a considerare una nuova disposizione per le linee $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$, la quale ci conduce ad analizzare un caso pel quale la espressione pel prodotto reciproco dei raggi di curvatura non si può dedurre da quelle date dal sig. GAUSS.

4. Rammentiamo che, ponendo

$$D = A\alpha + B\beta + C\gamma, \quad D_1 = A\alpha_1 + B\beta_1 + C\gamma_1, \quad D_2 = A\alpha_2 + B\beta_2 + C\gamma_2,$$

nelle quali

$$A = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}, \quad B = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad C = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

ed

$$\alpha = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \quad \beta = \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, \quad \gamma = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2},$$

$$\alpha_1 = \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \quad \beta_1 = \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}, \quad \gamma_1 = \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v},$$

$$\alpha_2 = \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, \quad \beta_2 = \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}, \quad \gamma_2 = \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

la equazione

$$(4) \qquad \frac{D}{E} m^2 + \frac{D_2}{G} n^2 + \frac{2 D_1}{\sqrt{EG}} m n + \sqrt{EG - F^2} = 0$$

rappresenta una linea del secondo ordine, esistente nel piano tangente la superficie nel punto di coordinate $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, riferita a due assi coordinati, i quali sono le tangenti, l'una alla linea esistente nella superficie, e per la quale $u = \text{cost.}$, l'altra alla linea pure esistente nella superficie, e per la quale $v = \text{cost.}$; ed avente il suo centro nel medesimo punto di coordinate $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ **). La equazione superiore rappresenta in una parola la indicatrice di DUPIN. Supponiamo ora che le due linee $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ sieno di quelle a tangenti conjugate; la indicatrice verrebbe in questo caso ad essere riferita a' suoi diametri conjugati, e quindi nella equazione della medesima dovrà essere nullo il coefficiente del prodotto mn, cioè la equazione di quella linea del secondo ordine diverrà:

$$(5) \qquad \frac{D}{E} m^2 + \frac{D_2}{G} n^2 + \sqrt{EG - F^2} = 0.$$

Se inoltre quelle linee rappresentabili dalle $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$, saranno ortogonali, ossia le linee medesime saranno linee di curvatura della superficie, sarà, come è noto,

*) Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, tomo II (1851), p. 291.

**) La equazione (4) venne data dal sig. CHELINI nella memoria inserita nel «Giornale Arcadico di Roma».

$F = 0$, e la equazione della indicatrice diverrà:

$$\frac{D}{E} m^2 + \frac{D_2}{G} n^2 + \sqrt{EG} = 0. \tag{6}$$

I risultamenti ottenuti ci porgono intanto i due seguenti teoremi:

I. — *Se le coordinate rettangolari di un punto qualunque di una superficie saranno funzioni di due variabili* u, v *tali che le linee rappresentate dalle equazioni* $u =$ cost., $v =$ cost., *sieno di quelle a tangenti conjugate, le coordinate* $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, *dovranno soddisfare alla equazione* $D_1 = 0$, *ossia alla*

$$A\alpha_1 + B\beta_1 + C\gamma_1 = 0.$$

II. — *Se le coordinate rettangolari di un punto qualsivoglia di una superficie saranno funzioni di due variabili* u, v *tali che le linee* $u =$ cost., $v =$ cost. *siano linee di curvatura della superficie, le coordinate* $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ *dovranno soddisfare alle equazioni* $F = 0$, $D_1 = 0$, *ossia alle*

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0, \qquad A\alpha_1 + B\beta_1 + C\gamma_1 = 0. \tag{7}$$

Questo secondo teorema è dovuto al sig. JOACHIMSTHAL *), che lo dimostrò appoggiandosi a considerazioni affatto differenti; il metodo di dimostrazione sopra adottato ha il vantaggio di indicar meglio quali sieno le proprietà delle linee di curvatura che dànno luogo a quelle equazioni.

5. Ritenuto che le linee $u =$ cost., $v =$ cost. sieno di quelle a tangenti conjugate, e quindi la equazione della indicatrice sia la (5), rammentata la relazione esistente fra i raggi di curvatura delle sezioni normali ad una superficie ed i diametri conjugati della indicatrice, avremo che il prodotto reciproco dei raggi di curvatura corrispondenti al punto centro della indicatrice sarà

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{D D_2}{(EG - F^2)^2}; \tag{8}$$

e, supposto essere le linee per le quali $u =$ cost., $v =$ cost. linee di curvatura della superficie, sarà

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{D D_2}{E^2 G^2}. \tag{9}$$

Che, se ritengansi essere le linee rappresentate dalle $u =$ cost., $v =$ cost., linee qualsivogliano esistenti nella superficie, la equazione della indicatrice sarà la (4), e si avrà:

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{D D_2 - D_1^2}{(EG - F^2)^2}.$$

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. XXX (1846), p. 347

È questa la espressione esibita dal sig. Gauss pel prodotto reciproco dei raggi di curvatura, o per la misura della curvatura della superficie come la denominò il sig. Gauss medesimo. Facili trasformazioni conducono a provare che il binomio $DD_2 - D_1^2$ eguaglia una espressione semplicemente formata colle quantità E, F, G, e colle loro derivate prime e seconde parziali, dal che si deduce il teorema. Affatto analogamente potremmo dimostrare che il prodotto DD_2 riducesi alla medesima espressione contenente le sole E, F, G e derivate parziali, allorquando si abbia riguardo alla equazione $D_1 = 0$, la quale deve sussistere affinchè le linee $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ sieno a tangenti conjugate. Troveremmo in questo modo che, nel caso che la misura della curvatura della superficie sia data dalla (8), si avrà:

$$-\frac{2\Delta}{R_1 R_2} = \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial G}{\partial u} + \frac{F}{G}\frac{\partial G}{\partial v} - 2\frac{\partial F}{\partial v}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{F}{G}\frac{\partial G}{\partial u}\right)\right],$$

e nel caso sia data dalla (9) sarà:

$$(10) \qquad -\frac{2\Delta_1}{R_1 R_2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\Delta_1}\frac{\partial G}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\Delta_1}\frac{\partial E}{\partial v}\right),$$

nelle quali

$$\Delta = \sqrt{EG - F^2}, \qquad \Delta_1 = \sqrt{EG}.$$

6. Indicando con ρ_1, ρ_2 i raggi di curvatura di due sezioni normali a tangenti conjugate, e con α l'angolo che quelle tangenti fanno tra loro, ritenute le linee $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ qualsivogliano, si ha, per la equazione (4),

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2} = \text{sen}^2\alpha \, \frac{DD_2 - D_1^2}{\sqrt{EG - F^2}};$$

il che equivale al dire:

Se una superficie flessibile è anche inestensibile, il prodotto reciproco dei raggi di curvatura di due qualsivogliano sezioni normali a tangenti conjugate, corrispondenti ad un punto qualunque di esse superficie, è una quantità la quale non varia per quel punto che variando l'angolo compreso dalle tangenti medesime, qualunque forma possa assumere la superficie per la sua flessibilità. In questo teorema trovasi compreso quello del sig. Gauss.

Per la medesima equazione (4) si ha anche la

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2D_1F - DG - D_2E}{(EG - F^2)^{\frac{3}{2}}};$$

e supponendo ortogonali le linee per le quali $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ sarà:

$$(11) \qquad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\frac{D}{E} + \frac{D_2}{G}\right).$$

Ora per i valori di D e D_2, col mezzo di alcune trasformazioni le quali in buona parte

riscontransi già nella memoria del sig. GAUSS, si ottengono le

$$D^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) E G - \frac{1}{4} G \left(\frac{\partial E}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{4} E \left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2,$$

$$D_2^2 = (\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2) E G - \frac{1}{4} G \left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{4} E \left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)^2;$$

le quali espressioni, denominando con ρ_1, ρ i raggi dei circoli osculatori delle linee $u =$ cost., $v =$ cost., si riducono alle

$$(12) \quad \begin{cases} D^2 = \left[\dfrac{E^2}{\rho^2} + \left(\dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial u}\right)^2\right] E G - \dfrac{1}{4} G \left(\dfrac{\partial E}{\partial u}\right)^2 - \dfrac{1}{4} E \left(\dfrac{\partial E}{\partial v}\right)^2 \\ \qquad = \dfrac{E^3 G}{\rho^2} - \dfrac{1}{4} E \left(\dfrac{\partial E}{\partial v}\right)^2, \\ D_2^2 = \left[\dfrac{G^2}{\rho_1^2} + \left(\dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial v}\right)^2\right] E G - \dfrac{1}{4} G \left(\dfrac{\partial G}{\partial u}\right)^2 - \dfrac{1}{4} E \left(\dfrac{\partial G}{\partial v}\right)^2 \\ \qquad = \dfrac{E G^3}{\rho_1^2} - \dfrac{1}{4} G \left(\dfrac{\partial G}{\partial u}\right)^2. \end{cases}$$

Questi valori di D e D_2 dànno manifestamente che:

Se una superficie flessibile è anche inestensibile, la somma dei raggi di curvatura reciproci corrispondenti ad un punto qualunque di essa superficie è una grandezza che dipende unicamente dai raggi dei circoli osculatori di due linee qualunque ortogonali esistenti in quella superficie e passanti per quel punto, comunque varii la forma della superficie medesima.

7. L'uso dei sistemi di linee esistenti in una superficie a rappresentare le posizioni dei punti della superficie medesima, già adottato molti anni sono dal prof. BORDONI nelle sue ricerche sulle linee e superficie parallele, e sull'equilibrio astratto delle Volte *), fu in questi ultimi tempi di molto utile ai Geometri in varie quistioni geometriche, meccaniche e fisiche. Nei lavori recenti dei signori BERTRAND, BONNET, CHELINI, LIOUVILLE e di molti altri, si riscontra un grande numero di nuove proprietà delle superficie o di linee esistenti in essa, ritrovate giovandosi di quel metodo di rappresentazione. Dobbiamo allo studio di quei lavori alcune fra le cose che qui si aggiungono.

Si supponga che le linee esistenti in una superficie qualunque per le quali $u =$ cost., $v =$ cost. sieno ortogonali; ritenute le denominazioni già adottate, sussisterà evidentemente la

$$\frac{x'}{\sqrt{E}} x_2 + \frac{y'}{\sqrt{E}} y_2 + \frac{z'}{\sqrt{E}} z_2 = 0,$$

---

*) Vedi in fine la « Nota I »

gli accenti in alto indicando derivate rispetto ad u e quelli al basso derivate rispetto a v. Inoltre si avrà:

$$E = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

Si derivi la prima di queste equazioni rispetto ad u, e la seconda rispetto a v; dal confronto delle risultanti si otterrà:

$$\frac{1}{2}\frac{E_{,}}{\sqrt{E}} = -\left[\left(\frac{x'}{\sqrt{E}}\right)' x_{,} + \left(\frac{y'}{\sqrt{E}}\right)' y_{,} + \left(\frac{z'}{\sqrt{E}}\right)' z_{,}\right],$$

dalla quale facilmente:

$$(13) \qquad \frac{1}{2}\frac{E_{,}}{E\sqrt{G}} = \frac{\cos\omega}{\rho},$$

indicando ω l'angolo che la direzione del raggio del circolo osculatore nel punto di coordinate $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ alla linea per la quale $v = \text{cost.}$ fa colla tangente nello stesso punto alla linea per la quale $u = \text{cost.}$, e ρ il raggio del circolo osculatore in quel punto alla linea $v = \text{cost.}$ È chiaro che affatto analogamente si avrà:

$$(14) \qquad \frac{1}{2}\frac{G'}{G\sqrt{E}} = \frac{\cos\omega_1}{\rho_1},$$

dove le ω_1, ρ_1, sono rispetto alla linea $u = \text{cost.}$ ciò che sono le ω, ρ rispetto alla linea $v = \text{cost.}$ Il sig. Ossian Bonnet nella sua memoria sulla teoria generale delle superficie *) fece grand'uso del rapporto $\frac{\cos\omega}{\rho}$; ad esso possiamo però sostituire un altro con qualche vantaggio.

S'immaginino due superficie sviluppabili, l'una tangente la linea per la quale $u = \text{cost.}$, l'altra tangente la linea per la quale $v = \text{cost.}$, e si suppongano quelle due superficie, nella posizione rispettiva in cui trovansi, sviluppate nel piano tangente la superficie al punto di coordinate $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$. In questo sviluppo le E, G, u, v non muteranno, gli angoli ω, ω_1 diventeranno nulli; talchè, indicando con r, r_1 i raggi di curvatura di quelle curve piane nelle quali si trasfigurano le linee di contatto tra la superficie e le superficie sviluppabili immaginate, si avranno le

$$(15) \qquad \frac{\cos\omega}{\rho} = \frac{1}{r}, \qquad \frac{\cos\omega_1}{\rho_1} = \frac{1}{r_1}.$$

Da queste relazioni risultano manifestamente i seguenti teoremi:

I. — *Se il piano del circolo osculatore in un punto qualunque ad una linea qualsi-*

*) Journal de l'École Polytechnique, cahier XXXII (1848), p. 1.—La formola (13) venne dimostrata in altro modo dal sig. prof. Mossotti nelle sue lezioni di Meccanica razionale, le quali sono in corso di pubblicazione. La sua dimostrazione poggia però sull'ipotesi che la linea $u = \text{cost.}$ sia geodetica. (Vedi in fine la « Nota II »).

voglia esistente in una superficie coinciderà col piano tangente la superficie in quel punto, il raggio del circolo medesimo eguaglierà il raggio di curvatura al punto corrispondente della curva piana, nella quale trasfigurasi la linea esistente nella superficie, considerata quale linea di contatto tra la superficie e la sviluppabile, quando questa sia distesa in un piano.

Per tutti i punti dello spigolo di regresso di una superficie sviluppabile qualunque ha appunto luogo la proprietà suddetta.

II. — *Se la superficie sviluppabile tangente un'altra qualunque lungo una linea geodetica esistente in questa seconda superficie si distenderà in un piano, la linea di contatto si trasfigurerà in una retta.*

III. — *Se la superficie sviluppabile tangente un'altra qualsivoglia lungo una parte continua del contorno di una figura della massima o minima area, fra le isoperimetre esistenti nella medesima superficie, si distenderà in un piano, la linea di contatto si cambierà in una circolare.* Infatti, per questa linea il rapporto $\frac{\cos\omega}{\rho}$ è costante *), per il che sarà anche $r =$ cost. **). È chiaro che le proprietà, rinvenute pel raggio di curvatura della linea piana, in cui trasfigurasi la geodetica e la linea racchiudente l'area massima o minima fra le isoperimetre, sussisteranno anche pel raggio della sfera avente un contatto di secondo ordine con ciascuna di quelle linee, ed il centro nel piano tangente la superficie nello stesso punto di contatto della sfera colla linea.

8. Il sig. Gauss nella memoria più volte citata, partendo dalla espressione

$$s' = \sqrt{E\,u'^2 + 2F\,u'v' + G\,v'^2}\,,$$

pose la equazione della geodetica per una superficie qualunque sotto una nuova forma; la quale equazione, allorchè si ritengano le linee $u =$ cost., $v =$ cost. essere ortogonali, e quindi $F = 0$, è la seguente:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial E}{\partial v}\frac{du}{ds} - \frac{\partial G}{\partial u}\frac{dv}{ds}\right), \tag{16}$$

essendo θ l'angolo che la tangente alla linea geodetica nel punto di coordinate u, v fa colla tangente nel medesimo punto alla linea per la quale $v =$ cost. Quella equazione per le formole (13), (14), (15) si potrà scrivere:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r}\sqrt{E}\frac{du}{ds} - \frac{1}{r'}\sqrt{G}\frac{dv}{ds}\,.$$

---

*) Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. VIII (1843), p. 241.

**) Questo teorema venne dimostrato dal chiarissimo sig. prof. Bordoni fino dall'anno 1832 in una memoria inserita nel tomo I degli « Opuscoli Matematici e Fisici » stampati in Milano, e trovasi ripetuto in una memoria del sig. Catalan. [Journal de l'Ecole Polytechnique, cahier XXIX (1843), p 121].

Da questa equazione si può facilmente passare ad una analoga per la linea racchiudente un'area massima o minima fra le isoperimetre. Si immaginino due nuove linee esistenti nella superficie, anch'esse ortogonali e passanti pel punto di coordinate u, v; supponiamo la geodetica riferita a queste nuove linee; si indichi con λ l'angolo che la tangente la geodetica nel punto di coordinate u, v fa colla tangente alla prima di queste linee nel medesimo punto. Avremo affatto analogamente:

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{1}{d}\sqrt{E_1}\frac{du_1}{ds} - \frac{1}{d_1}\sqrt{G_1}\frac{dv_1}{ds},$$

e le E_1, G_1, u_1, v_1, d, d_1 sono per queste nuove linee ciò che le E, G, u, v, r, r_1 erano per le prime. Ora, se indichiamo con ε l'angolo che la tangente quella prima linea nel punto di coordinate u, v fa colla tangente la linea $v =$ cost. nel medesimo punto, si ha:

$$\varepsilon = \theta + \lambda,$$

ritenendo come algebrica la somma nel secondo membro. Ma le equazioni superiori dànno:

$$\theta' = \frac{1}{r}u'\sqrt{E} - \frac{1}{r_1}v'\sqrt{G},$$

$$\lambda' = \frac{1}{d}u'_1\sqrt{E_1} - \frac{1}{d_1}v'_1\sqrt{G_1},$$

indicando gli accenti in alto derivate rispetto ad una variabile qualunque; quindi si avrà:

$$\varepsilon' = \frac{1}{r}u'\sqrt{E} - \frac{1}{r_1}v'\sqrt{G} + \frac{1}{d}u'_1\sqrt{E_1} - \frac{1}{d_1}v'_1\sqrt{G_1}.$$

Se supponesi che la seconda delle linee immaginate sia geodetica, sarà $\frac{1}{d_1} = 0$, quindi indicando con σ la lunghezza di un arco della seconda linea si avrà:

$$\frac{d\varepsilon}{d\sigma} = \frac{1}{r}\frac{du}{d\sigma}\sqrt{E} - \frac{1}{r_1}\frac{dv}{d\sigma}\sqrt{G} + \frac{1}{d},$$

ed osservando essere:

$$\cos\varepsilon = \frac{du}{d\sigma}\sqrt{E}, \qquad \operatorname{sen}\varepsilon = \frac{dv}{d\sigma}\sqrt{G},$$

si avrà:

$$(17) \qquad \frac{d\varepsilon}{d\sigma} = \frac{1}{r}\cos\varepsilon - \frac{1}{r_1}\operatorname{sen}\varepsilon + \frac{1}{d}.$$

Se la prima delle linee immaginate fosse una di quelle racchiudenti un'area massima o minima fra le isoperimetre, sarebbe $\frac{1}{d} =$ cost., e quindi

$$\frac{d\varepsilon}{d\sigma} = \frac{1}{r}\cos\varepsilon - \frac{1}{r_1}\operatorname{sen}\varepsilon + \text{cost.}$$

Questa equazione della linea racchiudente un'area massima o minima fra le isoperimetre potevasi ottenere anche direttamente col calcolo delle variazioni: abbiamo fatto uso del metodo superiore onde stabilire la equazione (17) che riducesi facilmente ad una trovata dal sig. Bonnet alla pag. 43 della sua memoria già citata. Notiamo che quella prima linea immaginata non può essere in generale geodetica, cioè non può essere in generale $\frac{1}{d} = 0$, giacchè in questo caso, rammentando la equazione (10) e le equazioni (13), (14), si vede subito dovrebbe sussistere la $\frac{1}{R\,R_2} = 0$, cioè la superficie dovrebbe essere sviluppabile.

9. La integrazione dell'equazione della geodetica sulla ellissoide fu già scopo alle ricerche dei sigg. Jacobi, Liouville, Joachimsthal, Chasles, ed altri. Le forme dell'espressioni rinvenute dai sigg. Joachimsthal e Liouville per la primitiva di primo ordine di quella equazione sono differenti: da ambedue si passa però facilmente alle forme assegnate dal sig. Jacobi *). Vediamo come assai brevemente si giunge ad una equazione che lega fra loro quelle due differenti forme sotto cui presentasi la medesima primitiva.

Sieno
$$\frac{x^2}{t^2} + \frac{y^2}{t^2 - b^2} + \frac{z^2}{t^2 - c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{u^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - u^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{v^2} - \frac{y^2}{b^2 - v^2} - \frac{z^2}{c^2 - v^2} = 1,$$

le equazioni di una ellissoide e di due iperboloidi, i quali, allorchè si ritenga essere u^2 compreso fra b^2 e c^2, e v^2 compreso fra 0 e b^2, segheranno l'ellissoide secondo due linee, le quali pel teorema di Dupin saranno linee di curvatura dell'ellissoide medesimo. La posizione di ogni punto dell'ellissoide si potrà ritenere individuata dalla comune intersezione di due di quelle linee ortogonali, le quali si otterrebbero facendo variare u, v. I valori poi delle x, y, z in funzione di u, v, che si ricavano da quelle tre equazioni, sono:

$$x = \frac{tuv}{bc}, \quad y = \frac{\sqrt{t^2 - b^2}\sqrt{u^2 - b^2}\sqrt{b^2 - v^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}, \quad z = \frac{\sqrt{t^2 - c^2}\sqrt{c^2 - u^2}\sqrt{c^2 - v^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}},$$

ed i valori delle E, G saranno:

*) Journal de Mathématiques pures et appliquées. t. VI (1841), p. 2[illegible]7.

$$E = \frac{(t^2 - u^2)(u^2 - v^2)}{(u^2 - v^2)(c^2 - u^2)}, \quad G = \frac{(t^2 - v^2)(u^2 - v^2)}{(b^2 - v^2)(c^2 - v^2)}.$$

Questi valori sostituiti nell'equazione (16) la rendono facilmente integrabile, ed ottiensi la

$$u^2 \operatorname{sen}^2 \theta + v^2 \cos^2 \theta = \alpha^2,$$

essendo α la costante introdotta dalla integrazione.

Ora il raggio di curvatura della geodetica per una superficie in un punto qualunque di essa è uguale al raggio di curvatura della sezione normale tangente la geodetica nel punto medesimo; quindi, indicando con ρ il raggio di curvatura della geodetica pel punto di coordinate u, v e con R_1, R_2 i raggi di massima e minima curvatura sferica nel punto medesimo, sussisterà, pel noto teorema d'EULERO, la

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R_1} \operatorname{sen}^2 \theta + \frac{1}{R_2} \cos^2 \theta, \tag{18}$$

indicando costantemente con θ l'angolo che la geodetica fa colla linea $v =$ cost. Si immagini il piano tangente l'ellissoide nel punto di coordinate u, v, ed il piano diametrale parallelo ad esso; è noto e facilmente dimostrasi che, indicando con d_1 il semidiametro di quella sezione il quale è parallelo alla tangente la linea per cui $u =$ cost., e con d_2 il semidiametro della sezione medesima parallelo alla tangente la linea per cui $v =$ cost., si ha:

$$d_1 = \sqrt{t^2 - v^2}, \quad d_2 = \sqrt{t^2 - u^2}.$$

Ma indicando con p la lunghezza della perpendicolare condotta dal centro della ellissoide al piano tangente, per la nota proposizione che in una ellissoide il parallelepipedo avente per spigoli tre semidiametri conjugati è equivalente a quello che ha per spigoli i tre semiassi, si avrà:

$$p\sqrt{t^2 - v^2}\sqrt{t^2 - u^2} = t\sqrt{t^2 - b^2}\sqrt{t^2 - c^2}.$$

Per queste espressioni vediamo essere

$$p\,d_1 = \frac{t\sqrt{t^2 - b^2}\sqrt{t^2 - c^2}}{\sqrt{t^2 - u^2}}, \quad p\,d_2 = \frac{t\sqrt{t^2 - b^2}\sqrt{t^2 - c^2}}{\sqrt{t^2 - v^2}}; \tag{19}$$

dunque, per tutte le linee per le quali $u =$ cost., sarà anche il prodotto $p\,d_1$ costante, e per tutte le linee per le quali $v =$ cost., sarà $p\,d_2$ pure costante. Ma tutte le linee per le quali $u =$ cost., $v =$ cost. sono linee di curvatura dell'ellissoide, dunque la proprietà indicata ha luogo per tutte quelle linee *). È noto essere

$$R_1 = \frac{d_1^2}{p}, \quad R_2 = \frac{d_2^2}{p},$$

*) Questa proprietà si può anche dimostrare partendo dalle equazioni (7) che devono sussistere per le linee di curvatura.

ed inoltre, indicando con d il diametro della sezione diametrale parallelo alla tangente la geodetica, si ha $\rho = \frac{d^2}{p}$. I valori di R_1 ed R_2 per le equazioni (18) si ponno porre sotto la forma:

$$R_1 = \frac{h^2}{p^3 (t^2 - u^2)}, \quad R_2 = \frac{h^2}{p^3 (t^2 - v^2)},$$

posto

$$h = t\sqrt{t^2 - b^2}\sqrt{t^2 - c^2};$$

per cui sostituendo nella (18) si avrà:

$$\frac{1}{p^2 d^2} = \frac{t^2}{h^2} - \frac{1}{h^2}(u^2 \operatorname{sen}^2 \theta + v^2 \cos^2 \theta);$$

ma per la geodetica sull'ellissoide abbiamo veduto essere

$$(20) \qquad u^2 \operatorname{sen}^2 \theta + v^2 \cos^2 \theta = \alpha^2,$$

quindi sarà

$$(21) \qquad p\,d = \frac{h}{\sqrt{t^2 - \alpha^2}}.$$

Questa è la forma assegnata dal sig. JOACHIMSTHAL *) per la primitiva del primo ordine dell'equazione della geodetica sulla ellissoide; essa dimostra che per la geodetica ha pure luogo la proprietà dichiarata più sopra per le linee di curvatura. Il valore poi del raggio di curvatura della geodetica nel punto di coordinate u, v sarà:

$$(22) \qquad \rho = \frac{h}{p^3 \sqrt{t^2 - \alpha^2}}.$$

Osserviamo da ultimo che, se la geodetica è tangente l'una o l'altra delle linee di curvatura, la α diventa eguale ad u, oppure a v, talchè possiamo dire che quella quantità, la quale divisa per p^3 dà i valori dei raggi di curvatura corrispondenti ad un punto della superficie e del raggio di curvatura della geodetica, ritiene lo stesso valore per ogni punto di una linea di curvatura e di ciascuna linea geodetica che le sia tangente. Da questa osservazione si ricavano moltissime delle proprietà già note per la geodetica sull'ellissoide **).

10. Allorquando col mezzo del calcolo delle variazioni ricercasi l'equazione della superficie della minima estensione, arrivasi alla nota equazione alle derivate seconde

---

*) La equazione (20) è la forma assegnata dal sig. LIOUVILLE all'equazione della geodetica, e la (21) quella assegnata dal sig. JOACHIMSTHAL. [Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. IX (1844), p. 401.—Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. XXVI (1843), p. [illegible]].

**) Vedi in fine la « Nota III ».

parziali: $$(1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r = 0,$$
per cui quella superficie ha anche la proprietà di avere in ogni suo punto i raggi di curvatura eguali e di segno contrario. MONGE diede pel primo l'integrale di quella equazione; dopo di lui venne trovato sotto differenti forme da LEGENDRE, LAPLACE, POISSON. Ecco come alcune delle formole esposte più addietro conducono brevemente ai risultati di MONGE, mostrando nello stesso tempo qual grado di generalità possiamo accordare ai risultati medesimi.

Rammentiamo la equazione
$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2D_1F - DG - D_2E}{(EG - F^2)^{\frac{3}{2}}};$$
per la superficie della minima estensione dovrà essere
$$\frac{2D_1F - DG - D_2E}{(EG - F^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

A questa equazione si può soddisfare in due differenti modi particolari, cioè supponendo $D_1 = G = E = 0$, oppure $F = D = D_2 = 0$; l'altro modo pure particolare, ossia $D = D_1 = D_2 = 0$, dovrebbe trascurarsi atteso il valore di $\frac{1}{R_1 R_2}$.

Incominciamo dal supporre $D_1 = G = E = 0$, ossia
$$A\alpha_1 + B\beta_1 + C\gamma_1 = 0,$$
$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = 0, \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = 0;$$
alla prima di queste equazioni può soddisfarsi ritenendo $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 = 0$, cioè
$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = 0, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial v} = 0, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v} = 0.$$
Queste tre ultime equazioni integrate avendo riguardo alle ultime due delle tre antecedenti, le quali devono pure verificarsi, daranno:
$$x = u + v, \qquad y = \varphi(u) + \psi(v),$$
$$z = \sqrt{-1}\left\{\int\sqrt{1+\varphi'(u)^2}\,du + \int\sqrt{1+\psi'(v)^2}\,dv\right\},$$
le quali sono le formole di MONGE *).

Supponiamo in secondo luogo sussistere la $F = D = D_2 = 0$; rammentando le equazioni (12) si avranno le due seguenti:
$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{E^2 G}\left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2, \qquad \frac{1}{\rho_1^2} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{E G^2}\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2,$$

*) Histoire de l'Académie Royale des Sciences, année 1784.—LACROIX, *Traité de Calcul différentiel et intégral*, t. II.

dalle quali per le equazioni (13), (14), (15) si otterrà:

$$\rho = r, \qquad \rho_1 = r_1.$$

Ne risulta che in questa ipotesi la superficie richiesta avrebbe la proprietà che per ogni suo punto due linee ortogonali avrebbero i raggi di curvatura eguali rispettivamente ai raggi di curvatura delle linee piane in cui si trasfigurerebbero le linee medesime, ritenute quali linee di contatto tra due superficie sviluppabili e la superficie cercata, allorquando quelle superficie sviluppabili si distendessero in un piano. Cioè per ciascun punto di queste superficie passano due linee ortogonali esistenti nelle superficie medesime e nel piano tangente le superficie in quel punto *).

Se finalmente vuolsi supporre $D = D_1 = D_2 = 0$, si ha anche $\frac{1}{R_1 R_2} = 0$, e ciò equivale al dire essere piana la superficie richiesta; giungiamo così geometricamente al risultato che dà l'integrale trovato da Poisson per la superficie della minima estensione **). (Vedi in fine la « Nota IV »).

11. La nota formola di Eulero

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{R_1} \operatorname{sen}^2 \omega + \frac{1}{R_2} \cos^2 \omega,$$

essendo d il raggio di curvatura di una sezione normale, dà una proprietà caratteristica per questa specie di superficie. Suppongasi $\omega = 45^\circ$; si avrà:

$$\frac{2}{d} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

e quindi per la superficie della minima estensione: $\frac{1}{d} = 0$. Siccome poi sussiste in generale:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d_1} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

sarà anche $\frac{1}{d_1} = 0$, cioè per ogni punto della superficie della minima estensione passeranno due linee esistenti nella superficie medesima, le quali faranno angoli di 45° colle linee di curvatura corrispondenti, ed avranno la proprietà che i raggi di curvatura in quel punto delle sezioni normali alle superficie tangenti le linee medesime sono infiniti.

---

*) L'esistenza di queste linee venne già indicata dal sig. Dupin (*Développements de Géométrie*, p. 190).

**) Lacroix, *Traité de Calcul différentiel et intégral*, t. II, p. 63. L'integrale trovato da Poisson è il seguente:

$$z = \varphi(x + ay) + y\sqrt{1 + a^2}\sqrt{-1}.$$

Sono queste le linee assintotiche di Dupin o le generatrici di M. Roberts *). Un'altra singolare proprietà ricavasi osservando che all'equazione

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$$

soddisfasi completamente supponendo $D\,G + D_2\,E = 0$; giacchè il supporre $F = 0$ non diminuisce la generalità. Da quest'ultima equazione si ha:

$$\frac{D^2}{E^2} = \frac{D_2^2}{G^2},$$

e quindi per le equazioni (12):

$$\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\rho_1^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2}.$$

12. Fra tutte le superficie le quali hanno la proprietà di avere in ogni punto i raggi di curvatura eguali, ma di segno contrario, vennero fino ad ora individuate le equazioni di due sole, cioè fra le superficie gobbe quella dell'elicoide a piano direttore, e fra le superficie di rotazione quella generata da una catenaria. La ricerca dell'equazione della prima di queste superficie, quale superficie avente la proprietà indicata, fu già scopo di alcune memorie di Legendre, Wantzel, Catalan, M. Roberts, Serret. Due modi si presentano spontanei alla soluzione di tale problema: o partire dalle formole di Monge, e determinare le costanti arbitrarie servendosi della condizione dell'essere la superficie generata da una retta che muovesi mantenendosi parallela ad un piano, oppure, seguendo il metodo adottato da Fourier per alcune quistioni fisico-matematiche, introdurre quella condizione prima di eseguire l'integrazione. Il primo metodo venne adoperato dal sig. Roberts, gli altri autori citati si tennero in parte al secondo **). Ma usando completamente del secondo metodo, il problema in quistione ed altri problemi geometrici analoghi a questo si risolvono assai facilmente, senza aver d'uopo di calcoli tanto lunghi quali sono quelli che riscontransi in ciascuna delle memorie citate.

Riteniamo che il piano direttore della superficie sia quello delle x, y; la equazione alle derivate parziali del second'ordine della superficie generata da una retta che si muove mantenendosi parallela a quel piano è la

$$p^2 t - 2pqs + q^2 r = 0.$$

Dunque la superficie richiesta avrà le due proprietà indicate dall'equazione superiore e dalla

$$(1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r = 0,$$

*) *Développements de Géométrie*, p. 189. — Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. XI (1846), p. 300.

**) Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. XI (1846), p. 300; t. VII (1842), p. 203.

ossia dalle due

$$p^2 t - 2pqs + q^2 r = 0, \qquad r + t = 0;$$

dalle quali si hanno le

$$(p^2 - q^2)t - 2pqs = 0, \qquad (p^2 - q^2)r + 2pqs = 0.$$

Queste sono facilmente integrabili e dànno il risultato conosciuto.

13. La equazione alle derivate parziali del secondo ordine della superficie di area data, la quale racchiude con un'altra individuata un corpo di volume massimo, è la seguente:

$$(23) \qquad \frac{1}{\alpha}(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}} + (1 + q^2)r + (1 + p^2)t - 2pqs = 0,$$

dalla quale deducesi avere la superficie richiesta la proprietà che in ogni suo punto la somma dei raggi di curvatura reciproci è costante.

Per ogni punto di ciascuna di queste superficie passano due linee esistenti nella superficie medesima, le quali hanno molta analogia colle assintotiche del sig. Dupin. Infatti, partendo dalla formola di Eulero, è facile il dimostrare come quelle due linee facciano angoli di 45° colle linee di curvatura corrispondenti a quel punto, e come i raggi di curvatura nel punto medesimo delle sezioni normali alla superficie tangenti le linee medesime siano costanti.

Fra le superficie generate dalla circonferenza di un cerchio di raggio costante, di cui il centro percorre una linea qualunque, mantenendosi il piano del circolo stesso sempre normale a quella linea, qual'è quella che ha per ogni suo punto la somma dei raggi di curvatura reciproci costante? Ecco una quistione semplicissima, alla soluzione della quale rendesi opportuno il metodo suindicato.

La equazione (23) dovendo sussistere insieme alla

$$\alpha^2(rt - s^2) + \alpha\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,[(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t] + (1 + p^2 + q^2)^2 = 0,$$

equazione alle derivate parziali del secondo ordine delle superficie generate nel modo indicato dalla circonferenza di raggio α, si avrà anche

$$\alpha\frac{rt - s^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = 0, \qquad \text{ossia} \qquad rt - s^2 = 0,$$

cioè la superficie richiesta dovrà anche essere sviluppabile. Sappiamo infatti che il cilindro ha le due proprietà richieste.

Osserviamo da ultimo che, se immaginasi la superficie rappresentata dalla equazione (23), l'area di una porzione della superficie parallela corrispondente ad una porzione individuata della superficie data eguaglia l'area di questa seconda porzione moltiplicata per una quantità costante, più l'area di una porzione determinata di una superficie sferica. La quantità costante è eguale alla distanza fra le due superficie più l'unità; il raggio della superficie sferica eguaglia quella distanza.

NOTA I.

Condizioni per l'equilibrio astratto di una vòlta qualunque.

Le condizioni generali per l'equilibrio astratto delle vòlte vennero date dal chiarissimo prof. Bordoni sino dall'anno 1821 nella memoria che già citammo, e più tardi nelle *Annotazioni agli Elementi di Meccanica ed Idraulica* del prof. Venturoli. In queste ricerche viene fatto uso, per la prima volta in quistioni di Meccanica, di linee esistenti nella superficie di intradosso a rappresentare punti della medesima, e le formole trovate, sebbene lo siano supponendo quelle linee, linee di curvatura dell'intradosso, rimangono le stesse qualunque sieno purchè ortogonali, come asserisce il professore Bordoni nella seconda delle memorie citate. Nel 1847 l'amico e collega professore Codazza in una memoria stampata in Pavia ritrovò le equazioni generali dello equilibrio supponendo che la *superficie di equilibrio* non sia limitata a coincidere collo intradosso della vòlta, ma possa essere una qualsivoglia entro lo spessore della vòlta medesima; ed a rappresentare i punti della superficie di equilibrio adottò due sistemi di linee ortogonali.

Ritenendo le denominazioni già usate per indicare la medesima quantità, le condizioni per l'equilibrio astratto di una vòlta qualunque, supposta qualsivoglia la superficie di equilibrio, e supposti essere qualunque i sistemi di linee adottati a rappresentare i punti, sono le tre seguenti:

$$\sqrt{EG-F^2}\,.\,R\cos\alpha = \left(P_u x_{\prime}\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}}\right)_{\prime} + \left(P_v x'\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}}\right)',$$

$$\sqrt{EG-F^2}\,.\,R\cos\beta = \left(P_u y_{\prime}\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}}\right)_{\prime} + \left(P_v y'\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}}\right)',$$

$$\sqrt{EG-F^2}\,.\,R\cos\gamma = \left(P_u z_{\prime}\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}}\right)_{\prime} + \left(P_v z'\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}}\right)';$$

nelle quali: R è la risultante di tutte le forze attive agenti al punto di coordinate $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ della superficie di equilibrio, ed α, β, γ gli angoli che la sua direzione fa coi tre assai ortogonali; P_u, P_v le forze passive che si esercitano al punto di coordinate u, v, le di cui direzioni si dimostrano dover essere anche in questo caso tangenti ordinatamente alle $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ Gli accenti in alto indicano derivate rispetto ad u, quelli al basso rispetto a v. Da quelle tre equazioni si ricavano le tre seguenti:

$$(1)\quad\begin{cases}\sqrt{EG-F^2}\,.\,X=(P_u)_v\sqrt{E}+\frac{1}{2}E_v\frac{1}{\sqrt{E}}(P_u-P_v)+\frac{1}{\sqrt{E}}(P_vF)'+P_vF\frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}}\right)',\\[2mm]\sqrt{EG-F^2}\,.\,Y=(P_v)'\sqrt{G}+\frac{1}{2}G'\frac{1}{\sqrt{G}}(P_v-P_u)+\frac{1}{\sqrt{G}}(P_uF)_v+P_uF\frac{1}{\sqrt{E}}\left(\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}}\right)_v,\\[2mm]\sqrt{EG-F^2}\,.\,Z=P_u\frac{D_2}{G}+P_v\frac{D}{E},\end{cases}$$

essendo X, Y, Z le tre componenti della forza R dirette secondo le tangenti alle linee $u=$ cost., $v=$ cost., e secondo la normale alla superficie di equilibrio nel punto di coordinate $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$.

Se le linee $u=$ cost., $v=$ cost. si ritengono essere ortogonali, le equazioni superiori si mutano nelle:

$$(2)\quad\begin{cases}X=(P_u)_v\frac{1}{\sqrt{G}}+\frac{\cos\omega_2}{\rho_2}(P_u-P_v),\\[2mm]Y=(P_v)'\frac{1}{\sqrt{E}}+\frac{\cos\omega_1}{\rho_1}(P_v-P_u),\\[2mm]Z=P_u\frac{1}{d_2}+P_v\frac{1}{d_1},\end{cases}$$

donde d_2, d_1 sono i raggi di curvatura delle sezioni normali tangenti alle linee $u=$cost., $v=$ cost. Se finalmente supponiamo essere geodetica la linea per la quale $u=$ cost., sarà $\frac{\cos\omega_1}{\rho_1}=0$, e le equazioni diventano:

$$(3)\quad\begin{cases}X=(P_u)_v\frac{1}{\sqrt{G}}+\frac{\cos\omega}{\rho}(P_u-P_v),\\[2mm]Y=(P_v)'\frac{1}{\sqrt{E}},\\[2mm]Z=P_u\frac{1}{\rho_1}+P_v\frac{1}{d_1}.\end{cases}$$

Le equazioni (2), (3) sono assai utili nelle applicazioni. Se poi nelle equazioni (2) si pongono in luogo di P_u, P_v le $-T_u$, $-T_v$, si ritrovano le equazioni date dal prof. Mossotti *) per l'equilibrio di una superficie flessibile ma inestensibile. Le T_u, T_v rappresentano la tensione.

---

*) *Lezioni di Meccanica razionale.* Firenze, Barucchi, 1851. (Lezione XIV^a^. Equazioni 38, 39, 40).

NOTA II.

Lo scopo di questa Nota è di rendere più facile il passare dalla terza delle equazioni (1) alla terza delle (2) della prima Nota. Rammentando le equazioni (12) si hanno facilmente le

$$\frac{D^2}{E^3 G} = \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{E^2 G}\left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2, \quad \frac{D_2^2}{E G^3} = \frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{E G^2}\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2,$$

e quindi per le (13), (14):

$$\frac{D^2}{E^3 G} = \frac{1}{\rho^2} - \frac{\cos^2 \omega}{\rho^2} = \frac{\operatorname{sen}^2 \omega}{\rho^2}, \quad \frac{D_2^2}{E G^3} = \frac{1}{\rho_1^2} - \frac{\cos^2 \omega_1}{\rho_1^2} = \frac{\operatorname{sen}^2 \omega_1}{\rho_1^2};$$

dalle quali:

$$\frac{D}{E\sqrt{E G}} = \frac{\operatorname{sen} \omega}{\rho}, \quad \frac{D_2}{G\sqrt{E G}} = \frac{\operatorname{sen} \omega_1}{\rho_1},$$

e pel noto teorema di MEUSNIER:

$$\frac{D}{E\sqrt{E G}} = \frac{1}{d_1}, \quad \frac{D_2}{G\sqrt{E G}} = \frac{1}{d_2}.$$

Queste ultime espressioni dànno, rammentata l'equazione (11),

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2},$$

relazione notissima.

NOTA III.

Molte sono le proprietà della geodetica sull'ellissoide. Esse trovansi esposte nelle memorie dei sigg. JOACHIMSTHAL, LIOUVILLE, CHASLES, W. ROBERTS, HART ed altri, inserite nei giornali di Crelle, di Liouville, e nel giornale di Cambridge e Dublino. A tutte queste aggiungiamo le seguenti, che deduconsi spontanee da una proprietà dell'ellissoide.

Il teorema del sig. JOACHIMSTHAL è il seguente *):

« Sint A, A' duo puncta superficiei secundi gradus, P, P' distantiæ centri a planis « tangentibus in his punctis, D, D' semidiametri superficiei, quarum directiones tangentibus « lineæ brevissimæ per A, A' ductæ in A et A' parallelæ, habemus $PD = P'D'$ ».

Si indichino con p_1, p_2, p_3 le perpendicolari condotte dal centro di una ellissoide ai piani tangenti la medesima nei punti in cui viene incontrata da tre semidiametri con-

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. XXVI (1843), p. 158.

jugati. Ritenendo le altre denominazioni usate dimostrasi facilmente sussistere la

$$\frac{1}{p_1^2}+\frac{1}{p_2^2}+\frac{1}{p_3^2}=\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^2-b^2}+\frac{1}{t^2-c^2}$$

e quindi anche la

$$\frac{d_1'^2}{p_1^2 d_1^2}+\frac{d_2'^2}{p_2^2 d_2^2}+\frac{d_3'^2}{p_3^2 d_3^2}=\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^2-b^2}+\frac{1}{t^2-c^2}.$$

Ora, se con d_1, d_2, d_3 si indicano tre semidiametri dell'ellissoide paralleli alle tangenti nei tre punti d'incontro dei tre semidiametri coniugati colla ellissoide a tre linee geodetiche condotte dai punti medesimi, saranno, pel teorema superiore,

$$p_1^2 d_1^2=p_2^2 d_2^2=p_3^2 d_3^2=\frac{t^2(t^2-b^2)(t^2-c^2)}{t^2-\alpha^2}.$$

per cui sarà anche:

$$d_1^2+d_2^2+d_3^2=\frac{1}{t^2-\alpha^2}\{t^2(t^2-b^2)+t^2(t^2-c^2)+(t^2-b^2)(t^2-c^2)\}.$$

Affatto analogamente si dimostrerà che, essendo ρ_1, ρ_2, ρ_3 i raggi di curvatura di quelle tre geodetiche, sussisterà la

$$p_1\rho_1+p_2\rho_2+p_3\rho_3=\frac{h}{\sqrt{t^2-\alpha^2}}\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^2-b^2}+\frac{1}{t^2-c^2}\right).$$

NOTA IV.

Si è dimostrato come, soddisfacendo all'equazione

$$\frac{2D_1F-DG-D_2E}{(EG-F^2)^{\frac{3}{2}}}=0$$

col supporre $D_1=0$, $E=0$, $G=0$, si giunge ai risultati di MONGE. È bene però l'osservare come in quei risultati le u, v si debbano ritenere come quantità indeterminate, mentre non ponno esistere in una superficie qualunque linee per le quali sieno nulle simultaneamente le D_1, E, G.

Abbiamo veduto come a quella equazione si soddisfi anche nell'ipotesi $F=D=D_2=0$. Ora per la Nota II queste tre condizioni riduconsi alle due:

$$\frac{1}{d_1}=0,\qquad \frac{1}{d_2}=0;$$

le linee $u=$ cost., $v=$ cost. sono quindi le assintotiche di DUPIN.

Pavia, li 20 gennajo 1852.

[C.].

V.

SOPRA UN TEOREMA DI JACOBI INTORNO AI CRITERJ D'INTEGRABILITÀ PER DISTINGUERE I MASSIMI DAI MINIMI VALORI DELLE PRIMITIVE.

(Lettera al prof. B. Tortolini).

Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, t. III [illegible]

In una memoria inserita nel fascicolo di aprile degli Annali da lei compilati [t. III (1852), p. 149], il prof. MAINARDI, oltre al dimostrare nuovamente il noto teorema di JACOBI intorno ai criterj per distinguere i massimi dai minimi valori delle primitive, propone un metodo per la ricerca di quei criterj. Io non entrerò a discutere quel metodo, solo farò osservare come l'analisi adottata rendasi complicata anche nella trattazione dei casi più semplici, e non solo quando si considerino primitive semplici di funzioni composte di più funzioni, o primitive multiple, ma anche nel caso di primitive semplici di funzioni composte di una sola funzione. Quest'osservazione venne però già fatta dall'autore medesimo.

Io le accennerò brevemente come si possano determinare in generale quei criterj, sia per le primitive semplici di funzioni di più funzioni, sia per le primitive multiple.

Una espressione della forma

$$\sum \alpha_{r,s} x_r x_s ,$$

nelle quali le r, s ponno assumere i valori di 0, 1, 2, ... n, sarà positiva se fra i coefficienti di essa abbiano luogo le relazioni:

$$\alpha_{n,n} > 0, \quad D_{n-1,n-1} \geqq 0, \quad D_{n-2,n-2} \geqq 0, \; \ldots \; D_{r,r} \geqq 0, \; \ldots \; D_{0,0} \geqq 0,$$

e sarà negativa allorquando siano

$$\alpha_{n,n} < 0, \quad D_{n-1,n-1} \geqq 0, \quad D_{n-2,n-2} \leqq 0, \; \ldots \; (-1)^{n-r} D_{r,r} \leqq 0, \; \ldots \; (-1)^{n} D_{0,0} \leqq 0,$$

indicando

$$D_{r,r} = \begin{vmatrix} \alpha_{n,n} & \alpha_{n,n-1} & \dots & \alpha_{n,r} \\ \alpha_{n-1,n} & \alpha_{n-1,n-1} & \dots & \alpha_{n-1,r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r,n} & \alpha_{r,n-1} & \dots & \alpha_{r,r} \end{vmatrix}.$$

Si consideri ora, per esempio, la primitiva

$$\int_a^t F(x, y, y', \dots y^{(n)}, z, z', \dots z^{(n)})\, dx.$$

I criterj per distinguere i valori di y, z che rendono massima o minima quella primitiva si hanno dal segno della primitiva dell'espressione:

$$\sum A_{r,s}\, \omega^{(r)} \omega^{(s)} + \sum B_{r,s}\, \theta^{(r)} \theta^{(s)} + 2 \sum C_{r,s}\, \omega^{(r)} \theta^{(s)},$$

nella quale $A_{0,0}, \dots B_{0,0}, \dots C_{0,0}, \dots$ sono i valori delle $F''(y), \dots F''(z), \dots F''(y, z), \dots$ corrispondenti a quei valori di y, z che rendono massima o minima la primitiva proposta. Si avranno quindi:

$$A_{r,s} = A_{s,r}, \quad B_{r,s} = B_{s,r}.$$

Le ω, θ sono le variazioni prime di y, z. La espressione superiore può ridursi, col metodo insegnato da LEGENDRE, alla forma:

$$\sum a_{r,s}\, \omega^{(r)} \omega^{(s)} + \sum b_{r,s}\, \theta^{(r)} \theta^{(s)} + 2 \sum c_{r,s}\, \omega^{(r)} \theta^{(s)},$$

ed un numero $n(2n+1)$ coefficienti di questa si ponno ritenere arbitrarj.

Ecco i valori di tutti i coefficienti di quella espressione: ponendo

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1 & u'_1 & \dots & u_1^{(n-1)} & v_1 & \dots & v_1^{(n-1)} \\ u_2 & u'_2 & \dots & u_2^{(n-1)} & v_2 & \dots & v_2^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{2n} & u'_{2n} & \dots & u_{2n}^{(n-1)} & v_{2n} & \dots & v_{2n}^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

$$H = u_1^{(n)} \frac{\partial \Delta}{\partial u_1^{(r)}} + u_2^{(n)} \frac{\partial \Delta}{\partial u_2^{(r)}} + \dots + u_{2n}^{(n)} \frac{\partial \Delta}{\partial u_{2n}^{(r)}},$$

$$K = v_1^{(n)} \frac{\partial \Delta}{\partial u_1^{(r)}} + v_2^{(n)} \frac{\partial \Delta}{\partial u_2^{(r)}} + \dots + v_{2n}^{(n)} \frac{\partial \Delta}{\partial u_{2n}^{(r)}},$$

$$T = u_1^{(n)} \frac{\partial \Delta}{\partial v_1^{(r)}} + u_2^{(n)} \frac{\partial \Delta}{\partial v_2^{(r)}} + \dots + u_{2n}^{(n)} \frac{\partial \Delta}{\partial v_{2n}^{(r)}},$$

$$U = v_1^{(n)} \frac{\partial \Delta}{\partial v_1^{(r)}} + v_2^{(n)} \frac{\partial \Delta}{\partial v_2^{(r)}} + \dots + v_{2n}^{(n)} \frac{\partial \Delta}{\partial v_{2n}^{(r)}},$$

si hanno dapprima

$$a_{r,s} = a_{r,n} \frac{H_s}{\Delta} + c_{r,n} \frac{K_s}{\Delta}, \quad b_{r,s} = b_{r,n} \frac{U_s}{\Delta} + c_{n,r} \frac{T_s}{\Delta},$$

$$c_{r,s} = a_{r,n} \frac{T_s}{\Delta} + c_{r,n} \frac{U_s}{\Delta}, \quad c_{s,r} = b_{r,n} \frac{K_s}{\Delta} + c_{n,r} \frac{H_s}{\Delta};$$

da queste si ottengono i valori delle

$$a_{\ldots}, \quad c_{\ldots}, \quad b_{\ldots}, \quad c_{\ldots},$$

i quali sostituiti nelle medesime dànno i valori generali:

$$a = A \frac{H H}{\Delta^2} + B \frac{K K}{\Delta^2} + C \frac{K H + K H}{\Delta^2},$$

$$b = A \frac{T T}{\Delta^2} + B \frac{U U}{\Delta^2} + C \frac{T U + T U}{\Delta^2},$$

$$c = A \frac{H T}{\Delta^2} + B \frac{K U}{\Delta^2} + C \frac{K T + H U}{\Delta^2},$$

$$c = A \frac{T H}{\Delta^2} + B \frac{U K}{\Delta^2} + C \frac{K T + K T}{\Delta^2}.$$

Si osservi che questi valori soddisfano alle

$$(a^2 - a\,a)(c^2 - a\,b) = (a\,c - a\,c)^2,$$
$$(c^2 - a\,b)(c^2 - a\,b) = (a\,b - a\,c)^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

per cui si avranno:

$$D = 0, \quad D = 0, \ldots D = 0;$$

ed i criterj richiesti saranno:

pel minimo $\qquad A > 0, \qquad A\,B - C^2 > 0,$

pel massimo $\qquad A_{n,n} < 0, \qquad A\,B - C^2 > 0.$

Facilmente si trovano analoghe formole per gli altri casi.

Terminerò esponendole due osservazioni intorno alla citata memoria del prof. Mainardi. La prima, puramente storica, risguarda la ricerca della *completa variazione di una simbolica funzione di più variabili indipendenti,* la quale dall'autore vuolsi attribuire totalmente a Poisson e ad Ostrogradsky. Quelle formole si rinvengono alle pagine 225, 226 del secondo volume delle *Lezioni di Calcolo sublime* del prof. Bordoni, le quali lezioni furono pubblicate nel 1831, mentre le memorie di Poisson e di Ostrogradsky vennero alla luce, la prima nel 1833, la seconda nel 1838. È bensì vero però che il Poisson in questa memoria dice aver enunciate quelle formole fino dall'anno 1818 nel « Bulletin de la Société Philomatique. »

La seconda osservazione riguarda l'applicazione che il prof. Mainardi fa del calcolo delle variazioni alla ricerca di una proprietà della superficie flessibile, inestensibile, omogenea, pesante, in equilibrio. Questa superficie venne già considerata da Poisson nella sua memoria « *Sur les surfaces élastiques* » *) e da Cisa de Gresy nella memoria « *Considérations sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles* » **).

---

*) Mémoires de l'Institut, 1812, p. 185.

**) Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino, v. XXIII (1818), p. 275.

Dalle ricerche di quei geometri, e dalle più recenti del prof. MOSSOTTI, deducesi facilmente come la proprietà enunciata dal prof. MAINARDI possa sussistere solo nell'ipotesi che la *tensione* in un punto qualunque della superficie sia costante in ogni direzione; il che generalmente non può accadere. È noto che la così detta *invariabilità dell'elemento* trae seco quella conseguenza.

Pavia, li 27 giugno 1852.

[C.].

VI.

RICERCHE INTORNO LE SVILUPPOIDI E LE SVILUPPATE.

Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, t. IV [illegible]

La teorica delle sviluppate a doppia curvatura delle linee piane e delle sviluppate delle linee a doppia curvatura è dovuta a MONGE. Nella sua memoria che fa parte del tomo X delle Memorie presentate all'Istituto di Parigi e forma un capitolo dell'opera « *Application de l'Analyse à la Géométrie* » si rinvengono l'equazione della superficie sviluppabile luogo geometrico delle sviluppate di una data linea, e le equazioni alle derivate mediante le quali si determinano nei casi particolari le sviluppate medesime. LANCRET, in una memoria inserita nel tomo II (1811) dell'ultima serie de' « Mémoires présentés, etc. » prese a considerare le sviluppoidi delle linee piane e delle linee a doppia curvatura, ossia le curve di cui le tangenti vengono segate da una curva data qualunque sotto un angolo costante, le quali comprendono come caso speciale le sviluppate. Altre memorie più recenti esistono su questo argomento, e fra le principali: quella del prof. MINICH sullo sviluppo delle curve piane, quella del prof. MOLINS sulle sviluppate delle linee a doppia curvatura, e quella del prof. DE MORGAN sulle sviluppate delle linee sferiche *).

In questo breve lavoro presentiamo alcune proprietà generali delle sviluppate e delle sviluppoidi, le quali si ricavano spontanee dalla loro definizione.

---

*) Nuovi saggi dell'Accademia di Padova, vol. V.—Journal de Mathématiques pures et appliquees, t. VIII (1843), p. 379.—The Cambridge and Dublin Mathematical Journal, vol. VI [illegible]

La porzione della retta tangente la sviluppoide e secante la curva data (trajettoria) sotto un angolo dato, compresa fra il punto di contatto ed il punto di intersezione, chiamasi raggio della sviluppoide, e denomineremo punti corrispondenti i punti su indicati.

Indicheremo con x, y, z, s le coordinate di un punto qualunque e l'arco di una sviluppoide o di una sviluppata di una curva qualunque; e con p, q, r, σ le coordinate del punto corrispondente e l'arco della trajettoria o della sviluppante. Chiamando t il raggio della sviluppoide, per la definizione si avranno le equazioni:

$$(1) \qquad p = x + t\frac{x'}{s'}, \quad q = y + t\frac{y'}{s'}, \quad r = z + t\frac{z'}{s'}.$$

$$(2) \qquad p'x' + q'y' + r'z' = s'\sigma' \cos\omega,$$

nelle quali gli accenti, quando non si avverta altrimenti, indicano derivate rispetto ad una variabile di cui si ritengono funzioni le p, q, r, x, y, z, ed ω l'angolo costante che la tangente alla trajettoria nel punto di coordinate p, q, r fa colla tangente alla sviluppoide nel punto corrispondente di coordinate x, y, z. Allorquando $\omega = \frac{\pi}{2}$ la sviluppoide diventa la sviluppata.

Per determinare il valore di t si derivino le equazioni (1), ed i valori di p', q', r' si sostituiscano nella (2); si ottiene la

$$s' + t' = \sigma' \cos\omega,$$

dalla quale, indicando con c la costante introdotta dalla integrazione, si ha:

$$t = \sigma\cos\omega + c - s,$$

e per le sviluppate:

$$t = c - s.$$

Dalle equazioni (1), (2) eliminando i coseni $\frac{x'}{s'}$, $\frac{y'}{s'}$, $\frac{z'}{s'}$ si ottiene:

$$(p - x)p' + (q - y)q' + (r - z)r' = \sigma'\cos\omega(\sigma\cos\omega + c - s);$$

equazione di un cono retto avente il vertice al punto di coordinate p, q, r, di cui l'asse è la tangente la trajettoria nel medesimo punto, e di cui l'apotema fa coll'asse l'angolo ω. Derivando l'equazione stessa, avendo riguardo alle (2), si ottiene:

$$(p - x)p'' + (q - y)q'' + (r - z)r'' + \sigma'^2 \operatorname{sen}^2\omega = \sigma''\cos\omega(\sigma\cos\omega + c - s).$$

Se da questa equazione e dalla penultima si eliminasse la variabile rispetto alla quale sono prese le derivate, si avrebbe la equazione della superficie luogo geometrico delle sviluppoidi. Dalle medesime equazioni scorgesi facilmente essere la caratteristica di questa superficie una curva piana, anzi una iperbole.

Ponendo per brevità $\frac{t}{s'} = v$ e derivando le equazioni (1), si hanno le

$$(3) \quad p' = (1 + v')x' + vx'', \quad q' = (1 + v')y' + vy'', \quad r' = (1 + v')z' + vz'',$$

le quali quadrate e sommate dànno:

$$\sigma'^2 = (1 + v')^2 s'^2 + 2v(1 + v')s's'' + v^2(x''^2 + y''^2 + z''^2).$$

Ora, dal valore di v ricavasi

$$(1 + v')s' + vs'' = \sigma' \cos\omega,$$

per cui sostituendo:

$$\sigma'^2 \operatorname{sen}^2\omega = v^2(x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2);$$

ed indicando con ρ il raggio di curvatura della sviluppoide al punto di coordinate x, y, z si ha:

(4) $$\rho\sigma' \operatorname{sen}\omega = ts',$$

e pel caso delle sviluppate:

$$\rho\sigma' = ts'.$$

Le equazioni (3) moltiplicate ordinatamente per x'', y'', z'' e sommate, allorquando ritengasi la s essere la variabile principale, dànno la

$$p'x'' + q'y'' + r'z'' = t(x''^2 + y''^2 + z''^2);$$

e questa, moltiplicata per $\frac{\rho}{\sigma'}$, mutasi nella

$$\cos b_1 = \frac{t}{\rho\sigma'} = \operatorname{sen}\omega,$$

essendo b_1 l'angolo che la tangente alla trajettoria fa col raggio del circolo osculatore la sviluppoide nei punti corrispondenti. Quando $\omega = \frac{1}{2}\pi$, sarà $b_1 = 0$, cioè la sviluppata è geodetica sulla superficie polare.

Se dalle equazioni (3) si elimina il binomio $(1 + v')$, si ottengono le

$$p'y' - q'x' = v(y'x'' - y''x'), \quad r'x' - p'z' = v(x'z'' - x''z'),$$

$$q'z' - r'y' = v(z'y'' - z''y'),$$

le quali, moltiplicate ordinatamente per z'', y'', x'' e sommate membro per membro, indicando con c_1 l'angolo che la tangente alla trajettoria fa colla perpendicolare al piano del circolo osculatore la sviluppoide, dànno:

$$\cos c_1 = 0,$$

ossia la tangente la trajettoria è la comune intersezione dei piani osculatori alle due curve in punti corrispondenti.

Derivando nuovamente le equazioni (3) si hanno le seguenti:

$$p'' = v''x' + (1 + 2v')x'' + vx''',$$

$$q'' = v''y' + (1 + 2v')y'' + vy''',$$

$$r'' = v''z' + (1 + 2v')z'' + vz'''.$$

Si moltiplichino queste equazioni ordinatamente per x', y', z' e sommandole membro per membro si avrà:

$$p''x' + q''y' + r''z' = v''s'^2 + (1 + 2v')s's'' + v(x'x''' + y'y''' + z'z''').$$

Riteniamo per maggiore semplicità essere σ la variabile principale; sussisterà l'equazione:

$$(1 + 2v')s's'' + v''s'^2 = -vs's''',$$

per cui sostituendo:

$$p''x' + q''y' + r''z' = -v\frac{s'^4}{\rho^2}.$$

Chiamando d il raggio di curvatura della trajettoria al punto di coordinate p, q, r, ed a_2 l'angolo che il raggio stesso fa col raggio della sviluppoide, si ha

$$\cos a_2 = -td\frac{s'^2}{\rho^2},$$

ossia, per l'equazione (4),

$$\cos a_2 = -\frac{d}{t}\operatorname{sen}^2\omega.$$

Da questa, ponendo per t il suo valore, ricavasi:

$$s = d\frac{\operatorname{sen}^2\omega}{\cos a_2} + \sigma\cos\omega + c.$$

Se $\omega = \frac{1}{2}\pi$, sarà:

$$s = \frac{d}{\cos a_2} + c;$$

e se la sviluppante e la sviluppata sono linee piane $\cos a_2 = 1$, e si ha la notissima:

$$s = d + c.$$

Se la trajettoria e la sviluppoide sono piane, gli angoli ω, a_2 sono l'uno complemento dell'altro e si ha:

$$s = d\operatorname{sen}\omega + \sigma\cos\omega + c,$$

la quale formola venne già data dal prof. MINICH.

Dai valori trovati di p', q', r', p'', q'', r'', si ricavano le seguenti equazioni:

$$r'q'' - r''q' = (1 + v')\left[\left(1 + 2v' - \frac{vv''}{1 + v'}\right)(z'y'' - z''y') + v(z'y''' - z'''y')\right] + v^2(z''y''' - z'''y''),$$

$$p'r'' - p''r' = (1 + v')\left[\left(1 + 2v' - \frac{vv''}{1 + v'}\right)(x'z'' - x''z') + v(x'z''' - x'''z')\right] + v^2(x''z''' - x'''z''),$$

$$q'p'' - q''p' = (1 + v')\left[\left(1 + 2v' - \frac{v v''}{1 + v'}\right)(y'x'' - y''x') + v(y'x''' - y'''x')\right]$$
$$+ v^2(y''x''' - y'''x'').$$

Queste, ordinatamente moltiplicate per $\frac{x'}{s'}$, $\frac{y'}{s'}$, $\frac{z'}{s'}$ e sommate, dànno, avendo riguardo all'equazione (4),

$$\varphi' \cos a_3 = \psi' \operatorname{sen}^2 \omega,$$

nella quale a_3 indica l'angolo che il raggio della sviluppoide fa colla perpendicolare al circolo osculatore la trajettoria, φ l'angolo di contingenza della trajettoria, ψ l'angolo di torsione della sviluppoide.

Se le equazioni superiori si moltiplicano ordinatamente per x'', y'', z'', e si sommano, ritenendo le derivate prese rispetto alla variabile s, ed indicando con b_3 l'angolo che il raggio di curvatura della sviluppoide fa colla perpendicolare al piano del circolo osculatore la trajettoria, si ottiene:

$$\varphi' \cos b_3 = \psi' \operatorname{sen} \omega \cos \omega.$$

Le sei rette che qui si considerano, cioè, le tangenti alle due curve, i raggi dei loro circoli osculatori e le perpendicolari ai piani dei circoli medesimi, costituendo due terne di rette ortogonali, avranno luogo tra gli angoli che esse formano fra loro le note relazioni. Quindi, indicando con c_2, c_3 gli angoli che la perpendicolare al piano del circolo osculatore la sviluppoide fa col raggio di curvatura della trajettoria e colla perpendicolare al piano osculatore la trajettoria stessa, e con b_2 l'angolo che formano fra loro i due raggi di curvatura, si avranno dapprima le

$$\cos c_2 = \frac{\cos a_3}{\cos b_1}, \qquad \cos c_3 = -\frac{\cos a_2}{\cos b_1};$$

dalle quali, pei valori trovati per $\cos a_2$, $\cos b_1$,

$$\cos c_2 = \frac{\cos a_3}{\operatorname{sen} \omega}, \qquad \cos c_3 = \frac{d}{t} \operatorname{sen} \omega.$$

Inoltre, essendo

$$\cos^2 a_3 + \cos^2 b_3 + \cos^2 c_3 = 1,$$

si ricaverà:

$$\cos a_3 = \operatorname{sen} \omega \sqrt{1 - \frac{d^2}{t^2} \operatorname{sen}^2 \omega},$$

$$\cos b_3 = \cos \omega \sqrt{1 - \frac{d^2}{t^2} \operatorname{sen}^2 \omega};$$

e quindi

$$\cos c_2 = \sqrt{1 - \frac{d^2}{t^2} \operatorname{sen}^2 \omega} .$$

Così, dalla

$$\cos^2 a_2 + \cos^2 b_2 + \cos^2 c_2 = 1,$$

si ottiene :

$$\cos b_2 = \frac{d}{t} \operatorname{sen} \omega \cos \omega .$$

Le formole trovate sono utili nella ricerca dei valori delle derivate degli angoli di prima e seconda flessione della trajettoria, in funzione delle derivate dei medesimi angoli della sviluppoide. S'indichino con $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, i coseni degli angoli che la tangente, il raggio di curvatura, e l'asse del piano osculatore per la trajettoria fanno con tre assi ortogonali; con λ_1, μ_1, ν_1; λ_2, μ_2, ν_2; λ_3, μ_3, ν_3 i coseni degli angoli che le medesime tre rette per la sviluppoide comprendono con quegli assi. Si denomini γ l'angolo di contingenza della sviluppoide, δ l'angolo di torsione della trajettoria. Si avranno le equazioni :

$$\alpha_1 = \lambda_1 \cos a_1 + \lambda_2 \cos b_1 + \lambda_3 \cos c_1 , \quad \alpha_3 = \lambda_1 \cos a_3 + \lambda_2 \cos b_3 + \lambda_3 \cos c_3 ,$$

$$\beta_1 = \mu_1 \cos a_1 + \mu_2 \cos b_1 + \mu_3 \cos c_1 , \quad \beta_3 = \mu_1 \cos a_3 + \mu_2 \cos b_3 + \mu_3 \cos c_3 ,$$

$$\gamma_1 = \nu_1 \cos a_1 + \nu_2 \cos b_1 + \nu_3 \cos c_1 , \quad \gamma_3 = \nu_1 \cos a_3 + \nu_2 \cos b_3 + \nu_3 \cos c_3 .$$

Ora è noto essere

$$\varphi'^2 = \alpha_1'^2 + \beta_1'^2 + \gamma_1'^2 , \qquad \delta'^2 = \alpha_3'^2 + \beta_3'^2 + \gamma_3'^2 ;$$

quindi, derivando le equazioni superiori, quadrando i risultati e sommando, si avranno i valori richiesti. Se nell'eseguire queste operazioni si avrà riguardo alle relazioni :

$$\lambda_1 \lambda_2' + \mu_1 \mu_2' + \nu_1 \nu_2' = -\gamma' , \quad \lambda_2 \lambda_1' + \mu_2 \mu_1' + \nu_2 \nu_1' = \gamma' , \quad \lambda_1' \lambda_2' + \mu_1' \mu_2' + \nu_1' \nu_2' = 0 ,$$

$$\lambda_1 \lambda_3' + \mu_1 \mu_3' + \nu_1 \nu_3' = 0 , \quad \lambda_3 \lambda_1' + \mu_3 \mu_1' + \nu_3 \nu_1' = 0 , \quad \lambda_1' \lambda_3' + \mu_1' \mu_3' + \nu_1' \nu_3' = \gamma' \psi' ,$$

$$\lambda_2 \lambda_3' + \mu_2 \mu_3' + \nu_2 \nu_3' = \psi' , \quad \lambda_3 \lambda_2' + \mu_3 \mu_2' + \nu_3 \nu_2' = -\psi' , \quad \lambda_2' \lambda_3' + \mu_2' \mu_3' + \nu_2' \nu_3' = 0 ,$$

ed ai valori di $\cos a_1$, $\cos b_1, \ldots$, si otterrà :

$$\varphi'^2 = \gamma'^2 + \psi'^2 \operatorname{sen}^2 \omega ,$$

$$\delta' = \frac{(d' t - d t') \operatorname{sen} \omega}{t \sqrt{t^2 - d^2 \operatorname{sen}^2 \omega}} - \frac{\sqrt{t^2 - d^2 \operatorname{sen}^2 \omega}}{t d \operatorname{sen} \omega} \cos \omega ,$$

che equivale alla

$$\delta' = \frac{(\gamma' \psi'' - \gamma'' \psi') \operatorname{sen} \omega}{\gamma'^2 + \psi'^2 \operatorname{sen}^2 \omega} + \psi' \cos \omega .$$

Si passa facilmente dall'una all'altra di queste due ultime equazioni osservando che le

formole trovate dànno

$$\gamma' = \frac{\operatorname{sen}\omega}{t}, \qquad \psi' = -\frac{\sqrt{t^2 - d^2 \operatorname{sen}^2\omega}}{t\,d\operatorname{sen}\omega}.$$

Il Lancret nella memoria citata aveva già dati i valori di φ' e di δ'; ma il secondo di essi differisce da quello ora trovato del termine $\psi' \cos\omega$. Allorquando $\omega = \frac{1}{2}\pi$, le formole superiori si mutano nelle

$$\varphi'^2 = \gamma'^2 + \psi'^2, \qquad \delta' = \frac{d't - dt'}{t\sqrt{t^2 - d^2}} = \frac{\gamma'\psi'' - \psi'\gamma''}{\gamma'^2 + \psi'^2}.$$

La seconda di queste equazioni è integrabile e dà

$$\delta + b = \operatorname{ang\,sen}\frac{d}{t},$$

dalla quale:

$$t = \frac{d}{\operatorname{sen}(\delta + b)},$$

già trovata dal sig. Molins.

Rammentando le denominazioni adottate più sopra si hanno le equazioni:

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1, \qquad \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0,$$

$$\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1, \qquad \alpha_1\lambda_1 + \beta_1\mu_1 + \gamma_1\nu_1 = \cos\omega,$$

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 = 1, \qquad \alpha_2\lambda_1 + \beta_2\mu_1 + \gamma_2\nu_1 = \cos a_2.$$

Eliminando successivamente dalle ultime due le μ_1, ν_1, ricavando dalle risultanti i valori di ν_1, μ_1 in funzione di λ_1, e sostituendoli nella terza delle equazioni medesime, giungesi ad una equazione del secondo grado, la quale risolta, avendo riguardo alla identità

$$\alpha_1^2 - \beta_2^2 - \gamma_2^2 = \alpha_2^2 - \beta_1^2 - \gamma_1^2 = -(\beta_2\gamma_1 - \beta_1\gamma_2)^2,$$

fornisce la

$$\lambda_1 = \alpha_1 \cos\omega + \alpha_2 \cos a_2 \pm (\beta_2\gamma_1 - \beta_1\gamma_2)\sqrt{\operatorname{sen}^2\omega - \cos^2 a_2}.$$

Analoghe espressioni si avranno per μ_1 e per ν_1. Sostituendo per α_1, α_2, ... $\cos a_2$ i loro valori, si hanno le

$$x = p - tp'\cos\omega + d^2p''\operatorname{sen}^2\omega \pm d\operatorname{sen}\omega\,(q''r' - q'r'')\sqrt{t^2 - d^2\operatorname{sen}^2\omega},$$

$$y = q - tq'\cos\omega + d^2q''\operatorname{sen}^2\omega \pm d\operatorname{sen}\omega\,(r''p' - r'p'')\sqrt{t^2 - d^2\operatorname{sen}^2\omega},$$

$$z = r - tr'\cos\omega + d^2r''\operatorname{sen}^2\omega \pm d\operatorname{sen}\omega\,(p''q' - p'q'')\sqrt{t^2 - d^2\operatorname{sen}^2\omega}.$$

Da queste, allorquando sarà conosciuto il valore di t in funzione di quantità spettanti alla trajettoria, data l'equazione della trajettoria si otterrà quella della sviluppoide. Un caso particolare in cui ciò si verifica è allorquando $\omega = \frac{\pi}{2}$ essendosi trovato $t = \frac{d}{\operatorname{sen}(\delta + b)}$, e

si avranno, per le sviluppate di una linea qualunque, le equazioni:

$$x = p + d^2 p'' \pm d^2 \cot(\delta + h) \,.\, (q''r' - q'r''),$$

$$y = q + d^2 q'' \pm d^2 \cot(\delta + h) \,.\, (r''p' - r'p''),$$

$$z = r + d^2 r'' \pm d^2 \cot(\delta + h) \,.\, (p''q' - p'q'').$$

Se supponesi la sviluppante essere una linea piana, sarà

$$r = 0, \qquad \delta = 0,$$

e quindi

$$x = p - d q', \qquad y = q + d p', \qquad z = \pm\, d \cot h;$$

le quali coincidono colle formole trovate da Fuss nel tomo VI (1818) de' « Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg ».

Nel caso che la sviluppante sia una linea sferica il valore di t assume un'altra forma, la quale ora veniamo a determinare. Per una linea sferica qualsivoglia hanno luogo come è noto le seguenti equazioni:

$$p = - d\alpha_2 + \frac{d'}{\delta'}\alpha_3, \qquad q = - d\beta_2 + \frac{d'}{\delta'}\beta_3, \qquad r = - d\gamma_2 + \frac{d'}{\delta'}\gamma_3.$$

Da queste, quadrando e sommando, si ha, indicando con a il raggio della sfera,

$$d^2 + \frac{d'^2}{\delta'^2} = a^2,$$

che integrata dà

$$d = a \operatorname{sen}(\delta + k);$$

e quindi la

$$\operatorname{sen}(\delta + h) = \frac{d}{t}$$

fornisce pel valore di t:

$$t = \frac{a\,d}{d \cos l \mp \sqrt{a^2 - d^2} \operatorname{sen} l},$$

dove $l = k - h$. Ora, indicando con θ l'angolo che il raggio di curvatura della trajettoria fa col raggio della sfera, dalle equazioni superiori deducesi

$$d = - a \cos \theta,$$

per cui

$$t = \frac{a \cos \theta}{\cos(\theta \pm l)}.$$

Le medesime equazioni superiori moltiplicate ordinatamente per λ, μ, ν, e sommate, denominando u_1 l'angolo che il raggio della sfera fa colla tangente alla sviluppata, dànno:

$$a \cos u_1 = \frac{d}{t} + \sqrt{a^2 - d^2}\,\frac{\sqrt{[illegible]}}{t},$$

nella quale sostituiti per t, d i valori ultimi esposti si ha:

$$\cos u_1 = \cos([illegible]),$$

cioè l'angolo u_1 è costante. Ed analogamente, chiamando u_2, u_3 gli angoli che il raggio della sfera fa col raggio di curvatura e colla perpendicolare al piano osculatore della sviluppata, si otterrebbero le

$$\cos u_2 = 0, \qquad \cos u_3 = \operatorname{sen}([illegible]).$$

Se l'angolo u_1 fosse retto, si avrebbe

$$t = \frac{a d}{\sqrt{a^2 - d^2}},$$

la quale sviluppata particolare corrisponde alla sviluppata ordinaria delle linee piane.

Pavia, li 15 agosto 1852.

[C.].

VII.

SULLE LINEE TAUTOCRONE.

Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, [illegible]

Le prime ricerche intorno le linee tautocrone nel vuoto, e nei mezzi resistenti in ragione diretta della velocità, sono dovute ad HUYGHENS, a NEWTON e ad HERMANN. EULERO e GIOVANNI BERNOULLI quasi contemporaneamente estesero quelle ricerche supponendo la resistenza del mezzo proporzionale al quadrato della velocità, alla quale ipotesi FONTAINE aggiunse un termine proporzionale alla semplice velocità. Le memorie di BERNOULLI e di FONTAINE contengono due metodi differenti per la soluzione del problema delle tautocrone, metodi che vennero in seguito adoperati dall'EULERO, da NECKER e da altri nella trattazione di questioni particolari. La prima memoria di LAGRANGE sull'argomento è del 1765; in essa l'autore proponesi di determinare in generale quale è la forza necessaria per produrre il tautocronismo, considerata come funzione qualsivoglia dello spazio e della velocità. I risultamenti ottenuti da LAGRANGE vennero encomiati e confermati dal D'ALEMBERT, ma incontrarono acerba critica da parte di FONTAINE, alla quale siamo debitori della seconda fra le memorie di LAGRANGE su questo problema.

I più recenti lavori intorno le linee tautocrone sono di ABEL, di PUISEUX, di BERTRAND. Nel primo volume delle opere di ABEL trovasi una memoria che ha per titolo « *Résolution d'un problème mécanique* », nella quale rinviensi una formola che, sebbene applicata dall'autore al solo caso della tautocrona percorsa da un grave nel vuoto, pure può usarsi in altre ipotesi di forza e di resistenza del mezzo. Però il metodo più

diretto alla ricerca delle tautocrone è quello della derivazione sotto il simbolo di integrazione, del quale se ne hanno vari esempi in una memoria del signor PUISEUX *). La difficoltà comune nella applicazione dei metodi del BERNOULLI, di FONTAINE, di ABEL, di PUISEUX, consiste nella ricerca del valore della velocità nelle supposizioni particolari per la forza acceleratrice, e per la resistenza del mezzo, valore necessario, come è noto, per determinare il tempo impiegato dal punto materiale a percorrere un arco qualunque della linea.

Il sig. BERTRAND, in un recente lavoro **) sul problema delle tautocrone, si propone di dimostrare, che la sola legge di resistenza del mezzo, nella quale la formola di LAGRANGE possa servire a determinare la forza, è precisamente quella alla quale applicavasi il metodo di FONTAINE; cioè rappresentata dalla somma di due termini, uno dei quali proporzionale alla sola velocità, e l'altro proporzionale al quadrato della velocità. Egli suppone a ciò che la forza risulti dalla somma di una funzione del solo spazio, e di una funzione della sola velocità, in modo che la derivata seconda della forza rispetto allo spazio ed alla velocità sia nulla. Ma questa osservazione, già fatta esplicitamente dal D'ALEMBERT ***), non era sfuggita al LAGRANGE, giacchè nella seconda delle sue memorie a proposito della memoria di FONTAINE dice che « l'application que « M. FONTAINE prétend faire de ses équations au cas où la force p serait exprimée par « $\sigma + gu + hu^2 + ku^3$ (g, h, k étant des constantes, et σ une fonction de x) est illu- « soire et fautive, comme il est facile de s'en convaincre avec un peu de réflexion d'après « les remarques que nous venons de faire sur ce sujet ». Però a ben altri casi può applicarsi la formola di LAGRANGE, allorquando non ristringasi la forza a dover soddisfare a quell'ipotesi; e ne abbiamo un bell'esempio in quello trattato dal sig. NECKER †) e richiamato di recente dal sig. BERTRAND ††).

Qualche lieve difficoltà analitica, od alcune considerazioni non abbastanza chiare, le quali incontransi nelle memorie di LAGRANGE, sono forse la causa che in nessuno dei trattati di meccanica, anche moderni, viene il problema delle tautocrone presentato con quella generalità che dovrebbesi attendere dopo quei lavori. In questa Nota, usando del metodo di derivazione sotto il simbolo di integrazione, troviamo, oltre la formola di LAGRANGE che esprime la forza necessaria a produrre tautocronismo, altre formole generali che dànno i valori della velocità e del tempo. Col mezzo di esse la difficoltà nelle questioni particolari viene ridotta a sole integrazioni di funzioni.

*) Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. IX (1844), p. 409. Anche la teorica delle derivate ad indice fratto offre un mezzo nella ricerca delle tautocrone.

**) Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. XII (1847), p. 121.

***) Mémoires de l'Académie de Berlin, année 1765, p. 401; année 1770, p. 121.

†) Mémoires présentés à l'Académie Royale de France, t. IV (1763), p. 176.

††) Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. XIII (1848), p. 231.

Considerando un mobile che percorre una linea qualunque, si indichi con v la velocità di cui esso è dotato alla fine del tempo t, con p la risultante delle forze agenti sul mobile alla fine dello stesso tempo, con s la lunghezza dell'arco di linea che alla fine di quel tempo rimane ancora al mobile da percorrere per giungere ad un punto determinato della linea, e con α la lunghezza dell'arco di linea compreso fra il punto da cui parte il mobile ed il punto determinato. Chiamando t il tempo impiegato dal mobile a percorrere l'arco α, si avrà:

$$t = -\int_0^{\alpha} \frac{1}{v}\, ds,$$

e la linea immaginata sarà tautocrona allorchè sia t indipendente da α, cioè sia $\frac{dt}{d\alpha} = 0$. Per ottenere effettivamente il valore della derivata di t rispetto ad α bisognerà eliminare la α dai limiti dell'integrale. Pongasi a questo scopo

$$(1) \qquad z = \omega k,$$

essendo z una funzione qualunque di s che supporremo annullarsi per $s = 0$; k il valore della medesima funzione nella quale in luogo di s pongasi α, ed ω una nuova variabile. Osservando essere v funzione di s e di α si avrà:

$$t = -\int_0^1 \frac{\psi'(\omega k)\, k}{v[\psi(\omega k),\ \alpha]}\, d\omega,$$

dove con $\psi(\omega k)$ intendesi il valore di s cavato dall'equazione (1), e ψ' indica la derivata della $\psi(\omega k)$ rispetto ad ωk. Avremo quindi:

$$\frac{dt}{d\alpha} = -\int_0^1 \frac{[\psi''(\omega k)\,\omega k k' + \psi'(\omega k)\, k']\, v - \left[\frac{\partial v}{\partial s}\psi'(\omega k)\,\omega k' + \frac{\partial v}{\partial \alpha}\right]\psi'(\omega k)\, k}{v^2}\, d\omega,$$

nella quale $k' = \frac{dk}{d\alpha}$. Da questa si ha:

$$\frac{dt}{d\alpha} = -\frac{1}{k}\int_0^{\alpha} \frac{[\psi''(z)\, z k' + \psi'(z)\, k']\, v - \left[\frac{\partial v}{\partial s}\psi'(z)\, z k' + \frac{\partial v}{\partial \alpha} k\right]\psi'(z)}{v^2}\,\frac{dz}{ds}\, ds;$$

e per le linee tautocrone, dovendo essere $\frac{dt}{d\alpha} = 0$ qualunque sia α, si avrà:

$$[\psi''(z)\, z k' + \psi'(z)\, k']\, v - \left[\frac{\partial v}{\partial s}\psi'(z)\, z k' + \frac{\partial v}{\partial \alpha} k\right]\psi'(z) = 0,$$

dalla quale:

$$\frac{k}{k'}\frac{\partial v}{\partial \alpha} + \psi'(z)\, z \frac{\partial v}{\partial s} - v\left(1 + \frac{\psi''(z)\, z}{\psi'(z)}\right) = 0.$$

Ora, essendosi dall'equazione $z = \omega k$ ricavato $s = \psi(\omega k)$, e quindi $s = \psi(z)$, sarà:

$$\frac{ds}{dz} = \psi'(z), \qquad \frac{d^2 s}{dz^2} = \psi''(z),$$

da cui

$$\frac{1}{z'(s)} = \psi'(z), \qquad -\frac{z''(s)}{z'^3(s)} = \psi''(z);$$

e questi valori sostituiti nell'equazione superiore dànno la

$$\frac{k}{k'}\frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{z}{z'(s)}\frac{\partial v}{\partial s} - v\left(1 - \frac{z z''(s)}{z'^2(s)}\right) = 0;$$

e ponendo

$$\frac{z}{z'(s)} = \varphi(s), \qquad \frac{k}{k'(\alpha)} = \varphi(\alpha),$$

si avrà:

$$\varphi(\alpha)\frac{\partial v}{\partial \alpha} + \varphi(s)\frac{\partial v}{\partial s} - \varphi'(s)v = 0.$$

Questa equazione alle derivate parziali del primo ordine integrasi facilmente decomponendola secondo il noto metodo nelle due:

$$\frac{d\alpha}{ds} - \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(s)} = 0, \qquad \frac{dv}{ds} - \frac{v}{\varphi(s)}\varphi'(s) = 0,$$

per cui la primitiva richiesta sarà:

$$f(\alpha) - f(s) = \gamma(v f'(s)), \tag{2}$$

posto

$$\int \frac{1}{\varphi(\alpha)}d\alpha = f(\alpha), \qquad \int \frac{1}{\varphi(s)}ds = f(s)$$

e γ essendo il simbolo di una funzione arbitraria. Dalla (2) si avrà anche la

$$v = \frac{1}{f'(s)}\lambda\big(f(\alpha) - f(s)\big).$$

La equazione (2), derivata rispetto ad s, dà

$$-f'(s) = \gamma'(v f'(s))\left[\frac{dv}{ds}f'(s) + v f''(s)\right],$$

ossia

$$-\frac{1}{\varphi(s)} = \gamma'\left(\frac{v}{\varphi(s)}\right)\left[\frac{dv}{ds}\frac{1}{\varphi(s)} - v\frac{\varphi'(s)}{\varphi^2(s)}\right],$$

la quale, moltiplicata per v, dà

$$v\frac{dv}{ds} = v^2\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} - \frac{v}{\gamma'\left(\frac{v}{\varphi(s)}\right)};$$

ma $v \frac{dv}{ds} = -p$, dunque:

$$p = v^2 \left[\frac{1}{v \gamma' \left(\frac{v}{\varphi(s)} \right)} - \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} \right].$$

Pongasi

$$\frac{\varphi(s)}{v} \frac{1}{\gamma' \left(\frac{v}{\varphi(s)} \right)} = \psi \left(\frac{v}{\varphi(s)} \right), \tag{3}$$

e si avrà, sostituendo,

$$p = v^2 \left[\frac{\psi \left(\frac{v}{\varphi(s)} \right)}{\varphi(s)} - \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} \right];$$

la quale coincide colla formola trovata da Lagrange. Dalla equazione (3) si ha facilmente:

$$\gamma' \left(\frac{v}{\varphi(s)} \right) = \frac{\varphi(s)}{v} \frac{1}{\psi \left(\frac{v}{\varphi(s)} \right)},$$

dalla quale, integrando,

$$\gamma \left(\frac{v}{\varphi(s)} \right) = \mu \left(\frac{v}{\varphi(s)} \right) + \text{cost.},$$

supposto

$$\int \frac{1}{u \psi(u)} du = \mu(u).$$

La costante introdotta dalla integrazione si determinerà osservando che per la equazione (2), supposto essere $v = 0$ allorchè $s = \alpha$, si ha $\gamma(0) = 0$, e quindi

$$\text{cost.} = -\mu(0).$$

Il valore trovato più sopra posto nell'equazione (2) dà la

$$f(\alpha) - f(s) = \mu \left(\frac{v}{\varphi(s)} \right) - \mu(0); \tag{4}$$

dalla quale si avrà il valore della velocità quando sia data la espressione della forza, e quindi si otterrà il valore del tempo.

Per mostrare l'utilità delle formole trovate nella trattazione dei casi speciali, supponiamo

$$\psi \left(\frac{v}{\varphi(s)} \right) = a + c \frac{\varphi^2(s)}{v^2};$$

si avrà:

$$p = v^2 \left(\frac{a}{\varphi(s)} - \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} \right) + c \varphi(s).$$

Pongasi
$$\frac{a}{\varphi(s)} - \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} = n,$$
n costante; risulteranno:
$$p = c\varphi(s) + nv^2, \qquad \varphi(s) = \frac{a}{n}(1 - e^{-ns}).$$
Per il valore di $\varphi(s)$ si avranno le
$$\int \frac{1}{\varphi(s)} ds = f(s) = \frac{1}{a}[ns + \log(1 - e^{-ns})],$$
$$\int \frac{1}{\varphi(\alpha)} d\alpha = f(\alpha) = \frac{1}{a}[n\alpha + \log(1 - e^{-n\alpha})],$$
$$\psi\left(\frac{v}{\varphi(s)}\right) = \frac{1}{2a}\log\left[c + \frac{n^2}{a}\frac{v^2}{(1 - e^{-ns})^2}\right],$$
e la (4) diventerà:
$$c(1 - e^{-n\alpha})^2 = \left[c(1 - e^{-ns})^2 + \frac{n^2}{a}v^2\right]e^{-2n(\alpha - s)};$$
dalla quale:
$$v = he^{-ns}\sqrt{(e^{n\alpha} - 1)^2 - (e^{ns} - 1)^2},$$
posto $h = \frac{\sqrt{ac}}{n}$. Questo valore della velocità dà quello del tempo:
$$t = -\frac{1}{h}\int_0^{\alpha} \frac{e^{ns}}{\sqrt{(e^{n\alpha} - 1)^2 - (e^{ns} - 1)^2}} ds,$$
ossia
$$t = \frac{\pi}{2\sqrt{ac}}.$$

Le formole trovate servono anche a dare la equazione della linea descritta dal mobile.

Nel caso presente, se supponesi che la forza acceleratrice sia l'azione della gravità, ed immaginiamo tre assi cui riferire quella linea, dei quali uno, per esempio quello della x, riteniamo verticale, si avrebbe:
$$\varphi(s) = \frac{dx}{ds} = \frac{a}{n}(1 - e^{-ns}),$$
la quale integrale, supponendo che s ed x si annullino insieme, dà
$$\frac{n^2}{a}x = e^{-ns} + ns - 1,$$
equazione della linea tautocrona in quella ipotesi per la forza e per la resistenza del mezzo.

Pavia, li 26 luglio 1852

[C.].

VIII.

SULLE LINEE TAUTOCRONE.

(In risposta ad alcune osservazioni dirette dal sig. G. Bertrand al prof. B. Tortolini).

Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, t. IV [illegible].

Una nota intorno le linee tautocrone *), da me pubblicata nel fascicolo di agosto 1852 di questi Annali, avendo richiamata l'attenzione del sig. prof. Bertrand sopra questo argomento, diede origine ad alcune osservazioni che il medesimo chiarissimo geometra diresse al prof. Tortolini **). La prima di tali osservazioni tende a provare che l'asserzione, la quale trovasi in quella nota (essere noto al d'Alembert ed al Lagrange che, supposta la forza composta di due termini, uno dei quali sia funzione della velocità e l'altro dello spazio percorso, la formola di Lagrange non può dare la soluzione che nei casi già trattati dal Fontaine) è esatta solo per quella parte che si riferisce al d'Alembert. Ed a questo fine il prof. Bertrand dichiara, che il passo della seconda delle memorie di Lagrange sull'argomento, da me citato a convalidare quella asserzione, non si riferisce in nessun modo alla maggiore od alla minore generalità della formola di Lagrange, ma ha per unico scopo la critica del metodo di Fontaine.

Convengo che questo fosse lo scopo di Lagrange, tanto più che il passo citato leggesi nel capitolo intitolato « Remarques sur la solution des tautochrones donnée par M. Fontaine », etc. ma parmi che l'una questione comprenda l'altra. Infatti, dietro quale ragionamento Lagrange dichiara « illusoire et fautive l'application que M. Fontaine prétend faire de ses équations au cas où la force p serait exprimée par $\sigma + gu + hu^2 + ku^3$ »?

---

*) [VII, pp. 49-54].

**) Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, t. III (1852), p. 547.

Io non so rinvenirlo che alla fine della pagina 120 di detta memoria nelle parole: « à cause que M. Fontaine suppose $\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial u} = 0$ ». Questa parte della critica del metodo di Fontaine, unitamente al fatto d'essere la memoria del Lagrange posteriore a quella del d'Alembert, inoltre quest'ultima memoria citata più volte dal Lagrange medesimo, avevanmi indotto ad asserire che l'osservazione del sig. Bertrand non era sfuggita a Lagrange.

La seconda osservazione si riferisce ad un passo della dimostrazione della formola di Lagrange da me data in quella nota. Lo scopo di essa nota, dimostrare la formola di Lagrange, basterebbe a salvare quel passo; pure è verissimo che non ho dichiarato esplicitamente che la detta formola, trovata con metodo qualsivoglia, non può somministrare tutte le soluzioni del problema; ma parmi evidente fosse tale la mia idea allorquando scrissi le parole: « Però *a ben altri casi* può applicarsi la formola di Lagrange », ecc. (pag. 364) *). E lo stesso passo della mia nota riprodotto dal sig. Bertrand riconferma questa asserzione; giacchè non dichiarai necessario l'annullarsi del numeratore della frazione, di cui l'integrale esteso fra i limiti 0 ed α dà il valore di $\frac{dt}{d\alpha}$, perchè sia $\frac{dt}{d\alpha} = 0$ qualunque sia α.

Non erami però in allora suggerito alla mente come il metodo adottato nella ricerca della formola di Lagrange poteva condurre ad una formola assai più generale, la quale, presentandomisi occasione, vengo ad esporre. Ritenute le denominazioni usate nella nota citata, se supponesi che il tempo t impiegato a percorrere l'arco α debba essere eguale ad una funzione individuata di α, cioè $t = \mu(\alpha)$, si avrà:

$$-\frac{1}{k}\int_0^\alpha \frac{[\psi''(z)z+\psi'(z)]k'v - \left[\frac{\partial v}{\partial s}\psi'(z)zk' + \frac{\partial v}{\partial \alpha}k\right]\psi'(z)}{v^2}\,\frac{dz}{ds}\,ds = \frac{d\mu}{d\alpha},$$

cioè dovrà essere

$$(1)\quad -\frac{1}{k}\int \frac{[\psi''(z)z+\psi'(z)]k'v - \left[\frac{\partial v}{\partial s}\psi'(z)zk' + \frac{\partial v}{d\alpha}k\right]\psi'(z)}{v^2}\,\frac{dz}{ds}\,ds = \rho(s, \alpha),$$

essendo $\rho(s, \alpha)$ tale funzione da verificare la

$$\rho(\alpha, \alpha) - \rho(0, \alpha) = \frac{d\mu}{d\alpha}.$$

Derivando rispetto ad s l'equazione (1), ed operando sul risultato col metodo usato

*) Vedi pag. [illegible] di questo volume.

nella nota, si ottiene la

$$\varphi(s)\frac{\partial v}{\partial s}+\varphi(x)\frac{\partial v}{\partial x}-v\varphi'(s)-v^2\varphi(x)\frac{\partial \rho}{\partial s}=0,$$

la quale integrata dà:

$$f(s)-f(x)=\gamma\left(\frac{\varphi(s)}{v}+\varphi(x)\rho(s,\, x)\right), \tag{2}$$

essendo

$$\int\frac{1}{\varphi(s)}ds=f(s),\qquad \int\frac{1}{\varphi(x)}dx=f(x)$$

e γ il simbolo di una funzione arbitraria.

La (2) derivata rispetto ad s dà:

$$\frac{1}{\varphi(s)}=\gamma'(\theta(s,\, x))\left[\frac{v\varphi'(s)-\frac{\partial v}{\partial s}\varphi(s)}{v^2}+\varphi(x)\frac{\partial \rho}{\partial s}\right],$$

posto per brevità

$$\theta(s,\, x)=\frac{\varphi(s)}{v}+\varphi(x)\rho(s,\, x);$$

e questa, moltiplicata per v^3 e divisa per $\varphi(s)$, conduce alla

$$p=v^2\left[\frac{v}{\varphi(s)}\left(\frac{1}{\varphi(s)\gamma'(\theta(s,\, x))}-\varphi(x)\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)-\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)}\right],$$

che è la formola cercata. Essa comprende il caso del tautocronismo allorquando suppongasi la funzione $\rho(s,\, x)$ soddisfare all'equazione

$$\rho(x,\, x)=\rho(0,\, x).$$

Riassumo dichiarandomi pienamente d'accordo col chiarissimo sig. Bertrand, avere il Lagrange attribuita troppa generalità alla sua formola, ed intendo anzi che il metodo di dimostrazione da me adottato nella ricerca di essa serva a convalidare questa opinione.

Pavia, li 7 gennajo 1853.

[C.].

IX.

SULLE LINEE TAUTOCRONE.

(Lettera al prof. B. Tortolini)

Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, tomo IV (1853), pp. [illegible]

Signor Professore,

Spiacemi il dover occupare ancora una pagina degli Annali compilati da V. S. in una quistione per la quale già ne occupai forse troppe. E tanto più mi spiace, in quanto che le osservazioni inserite in detti Annali [t. IV (1853), p. 65] sotto il titolo « *Sulle linee tautocrone, Osservazioni aggiunte all'articolo del sig.* BERTRAND » non meritando considerazione veruna comechè erronee o futili, anche la risposta a quelle osservazioni non potrà avere alcuna importanza scientifica.

Non so comprendere come un matematico possa fare questo ragionamento.

Data la equazione

$$t = -\int_0^{\alpha} \frac{1}{v(s, \alpha)} ds,$$

supponendo $\frac{dt}{d\alpha} = 0$, il valore di v che si ottiene dall'eseguire effettivamente la derivazione rispetto ad α, sostituito nel secondo membro dell'equazione medesima, non potrà rendere $t =$ cost. che per forme assegnate alla funzione *arbitraria* che entra a formare il valore stesso di v. In questo ragionamento l'errore è duplice, sia cioè per quanto si riferisce al calcolo degli integrali definiti, sia per quanto si riferisce all'integrazione di equazioni alle derivate parziali. Ma quantunque l'errore sia manifesto, discenderò a considerare anco le apparenze alle quali pare si tenga principalmente il signor ANONIMO. La formola da me data per la velocità nella prima nota sulle linee

tautocrone *) è la seguente:

$$v = \frac{1}{f'(s)} \lambda \big(f(\alpha) - f(s)\big), \tag{1}$$

della quale il sig. ANONIMO dice « non includere la condizione del tautocronismo ». E lo prova nel seguente modo: posto

$$f(\alpha) - f(s) = u, \qquad \frac{1}{\lambda(u)} = F'(u),$$

si ha

$$v = -\frac{1}{F'(u)\dfrac{\partial u}{\partial s}},$$

per cui

$$t = F(0) - F\big(f(\alpha) - f(0)\big).$$

E quindi, accontentandosi delle apparenze, dice il t non essere indipendente da α, *e la formola* (1) *porgere il valore di t libero dall'integrale e nulla di più.* Ma se il sig. ANONIMO si fosse dato la pena di leggere con qualche attenzione quella mia nota, avrebbe osservato che, essendo

$$f(\alpha) = \int \frac{1}{\varphi(\alpha)} d\alpha, \qquad f(s) = \int \frac{1}{\varphi(s)} ds,$$

inoltre

$$\frac{1}{\varphi(\alpha)} = \frac{k'(\alpha)}{k}, \qquad \frac{1}{\varphi(s)} = \frac{z'(s)}{z},$$

e quindi

$$f(\alpha) = \log. A k, \qquad f(s) = \log. B z,$$

A, B costanti, si ha:

$$f(\alpha) - f(s) = \log. C \frac{k}{z},$$

ed

$$f(\alpha) - f(0) = \log. \infty,$$

giacchè z è tal funzione che annullasi per $s = 0$ (pag. 365) **). Dunque il t contiene solo apparentemente la α, e ciò per la natura stessa delle operazioni eseguite, lasciando interamente arbitraria la forma della funzione f, come deve aver luogo finchè il problema si riguardi dal solo lato analitico.

Ho chiamato anche futili le osservazioni del sig. ANONIMO; e tale appunto è la seconda di esse, nella quale l'autore chiama: *impiegare debitamente la differenziazione*

---

*) [VII, pp. 49-54].

**) [VII, pp. 49-54 (p. 51)].

della funzione soggetta all'integrale, cioè della

$$\int_0^\alpha \frac{1}{v(s,\ \alpha)}\, ds\,,$$

col porre $s = \alpha\omega$, ω nuova variabile, intendendosi forse che non sia *debitamente impiegata* quell'operazione col porre $z = k\omega$, essendo z una funzione qualunque di s, e k il valore della medesima funzione dove in luogo di s pongasi α, come io feci in quella nota. Se in luogo di *debitamente* avesse il sig. ANONIMO detto *più brevemente,* poteva analiticamente aver ragione; ma non già nel problema delle tautocrone, giacchè quella ipotesi condurrebbe ad una formola per la forza acceleratrice contenente una sola funzione arbitraria, e quindi molto meno generale di quella di LAGRANGE.

Pavia, li 5 marzo 1853.

[C.].

X.

SULLE LINEE DI CURVATURA DELLE SUPERFICIE.

Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, [illegible]

Teorema I. — *Se la linea comune intersezione di due superficie sarà linea di curvatura tanto per l'una che per l'altra superficie, lungo di essa linea le due superficie si segano sotto un angolo costante.*

Sieno

$$F(x, y, z) = 0, \qquad \varphi(x, y, z) = 0$$

le equazioni delle due superficie; posto per brevità

$$F'(x) = X, \quad F'(y) = Y, \quad F'(z) = Z, \quad \varphi'(x) = P, \quad \varphi'(y) = Q, \quad \varphi'(z) = R,$$

essendo la comune intersezione di esse linea di curvatura della prima superficie, avranno luogo le equazioni:

$$(1) \qquad \begin{cases} Xx' + Yy' + Zz' = 0, \\ x'(YZ' - Y'Z) + y'(ZX' - XZ') + z'(XY' - X'Y) = 0; \end{cases}$$

ed essendo anche linea di curvatura della seconda superficie, sussisteranno le

$$(2) \qquad \begin{cases} Px' + Qy' + Rz' = 0 \\ x'(QR' - Q'R) + y'(RP' - R'P) + z'(PQ' - P'Q) = 0. \end{cases}$$

Dalla prima delle equazioni (1) e dalla prima delle (2) si hanno le

$$(3) \qquad \frac{x'}{YR - ZQ} = \frac{y'}{ZP - XR} = \frac{z'}{XQ - YP},$$

per le quali le altre due equazioni si trasformano nelle

$$(PX'+QY'+RZ')(X^2+Y^2+Z^2)-(PX+QY+RZ)(XX'+YY'+ZZ')=0,$$

$$(XP'+YQ'+ZR')(P^2+Q^2+R^2)-(PX+QY+RZ)(PP'+QQ'+RR')=0;$$

le quali, moltiplicate ordinatamente per

$$\frac{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \quad \frac{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}$$

e sommati i risultati, dànno la:

$$\left[\frac{PX+QY+RZ}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\right]'=0;$$

quindi integrando, ecc.

Questo teorema è una delle questioni proposte nel fascicolo del novembre 1852 (t. XI, p. 402) dei « Nouvelles Annales de Mathématiques ».

TEOREMA II. — *Supposto che due superficie si seghino lungo la linea di comune intersezione sotto un angolo costante, se questa linea sarà linea di curvatura per l'una delle superficie lo sarà anche per l'altra.*

Ritenute le stesse denominazioni sussisteranno le tre equazioni:

$$Xx'+Yy'+Zz'=0, \qquad Px'+Qy'+Rz'=0,$$

$$\frac{PX+QY+RZ}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}=h,$$

h costante. Derivando la terza di queste si giunge facilmente alla

$$\begin{aligned}&(X^2+Y^2+Z^2)[(YR-ZQ)(QR'-Q'R)\\&+(ZP-XR)(RP'-R'P)+(XQ-YP)(PQ'-P'Q)]\\&-(P^2+Q^2+R^2)[(YR-ZQ)(YZ'-Y'Z)\\&+(ZP-XR)(ZX'-Z'X)+(XQ-YP)(XY'-X'Y)]=0,\end{aligned}$$

la quale per le equazioni (3) assume la forma:

$$\begin{aligned}&(X^2+Y^2+Z^2)[x'(QR'-Q'R)+y'(RP'-R'P)+z'(PQ'-P'Q)]\\&(P^2+Q^2+R^2)[x'(YZ'-Y'Z)+y'(ZX'-Z'X)+z'(XY'-X'Y)].\end{aligned}$$

Da questa equazione, osservate le (1), (2), deducesi subito il teorema.

TEOREMA III. — *Supposto che una superficie venga segata da altre due in modo che le due linee comuni intersezioni sieno per la prima superficie linee di curvatura corrispondenti ad uno stesso punto, ed anche linee di curvatura per la seconda e terza superficie,*

queste due ultime superficie si segheranno lungo la loro comune intersezione sotto un angolo costante.

Sia
$$\psi(x, y, z) = 0$$

la equazione della terza superficie, e posto

$$\psi'(x) = L, \qquad \psi'(y) = M, \qquad \psi'(z) = N,$$

pel primo teorema si avranno le

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{PX + QY + RZ}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} &= h, \\ \frac{LX + MY + NZ}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} &= k; \end{aligned} \right.$$

ed indicando con p, q, r le coordinate di un punto della comune intersezione della prima e terza superficie, pel dato teorema sussisteranno le

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{p'}{YN - ZM} = \frac{q'}{ZL - XN} = \frac{r'}{XM - YL} \\ &p'x' + q'y' + r'z' = 0. \end{aligned} \right.$$

Quest'ultima equazione, osservate le equazioni (3) e le (5), diventa:

$$(PL + QM + RN)(X^2 + Y^2 + Z^2) - (PX + QY + RZ)(LX + MY + NZ) = 0;$$

e quindi per le equazioni (4):

$$\frac{PL + QM + RN}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}} = hk.$$

Come corollario di quest'ultimo teorema e del teorema II si ha evidentemente:

Teorema IV. — *Supposto che una superficie venga segata da altre due in modo che le due linee comuni intersezioni sieno per la prima superficie linee di curvatura corrispondenti ad uno stesso punto, ed anche linee di curvatura per la seconda e terza superficie, se la linea comune intersezione di queste due ultime superficie sarà linea di curvatura per una di esse, lo sarà anche per l'altra.*

Dai teoremi I e II si deducono anche i seguenti:

Teorema V. — *Se le linee comuni intersezioni di tre superficie saranno a due a due linee di curvatura per le superficie stesse, lungo quelle linee le superficie si segheranno sotto angoli costanti.*

Teorema VI. — *Se tre superficie si segheranno a due a due lungo le linee di comune intersezione sotto angoli costanti, e le linee di comune intersezione fra la prima e seconda*

superficie, prima e terza, seconda e terza, saranno ordinatamente linee di curvatura per la prima, per la terza, per la seconda superficie, lo saranno anche per la seconda, per la prima, per la terza superficie.

TEOREMA VII. — *Se le linee comuni intersezioni di tre superficie saranno due a due per ciascuna superficie linee di massima e di minima curvatura corrispondenti al loro punto comune, quelle superficie saranno ortogonali.*

Indicando con l, m, n le coordinate di un punto della comune intersezione della seconda e terza superficie, si avranno le equazioni:

$$Xx' + Yy' + Zz' = 0, \quad Xp' + Yq' + Zr' = 0, \quad Pl' + Qm' + Rn' = 0,$$

$$Px' + Qy' + Rz' = 0, \quad Lp' + Mq' + Nr' = 0, \quad Ll' + Mm' + Nn' = 0.$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{PX + QY + RZ}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} &= a, \\ \frac{LX + MY + NZ}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} &= b, \\ \frac{LP + MQ + NR}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}} &= c, \end{aligned}\right\} \qquad (a,\ b,\ c \text{ costanti})$$

$$p'x' + q'y' + r'z' = 0, \quad l'x' + m'y' + n'z' = 0, \quad l'p' + m'q' + n'r' = 0.$$

Per queste equazioni, rammentato il teorema III, si avranno le

$$a = bc, \qquad b = ac, \qquad c = ab;$$

unica soluzione delle quali è la $a = b = c = 0$, trascurandosi la $a = b = c = 1$ per ragioni facilmente vedute. Dunque si avranno le

$$PX + QY + RZ = 0, \quad LX + MY + NZ = 0, \quad LP + MQ + NR = 0;$$

ossia le tre superficie sono ortogonali.

[R.].

XI.

SULLA INTEGRAZIONE DELLA EQUAZIONE DELLE GEODETICHE.

Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, tomo IV [illegible]

La equazione della geodetica per una superficie qualunque sotto la forma assegnatagli da Gauss è la seguente:

$$\theta' = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial E}{\partial v}u' - \frac{\partial G}{\partial u}v'\right), \tag{1}$$

supposte: le linee $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ essere ortogonali,

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

e θ l'angolo che la geodetica fa colla linea $v = \text{cost.}$ Gli accenti indicano derivate rispetto ad una variabile qualunque, la quale riterremo essere l'arco della geodetica. Dalle note equazioni:

$$\cos\theta = u'\sqrt{E}, \qquad \text{sen}\,\theta = v'\sqrt{G}, \tag{2}$$

si ottiene la

$$\text{sen}\,\theta\cos\theta = u'v'\sqrt{EG},$$

per la quale la (1) si muta nella

$$2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta.\theta' = u'v'\left(\frac{\partial E}{\partial v}u' - \frac{\partial G}{\partial u}v'\right),$$

e per le (2) nella

$$2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta.\theta' = \frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial v}v'\cos^2\theta - \frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial u}u'\,\text{sen}^2\theta. \tag{3}$$

Sotto questa nuova forma la equazione della geodetica si presta facilmente all'integrazione in molti casi. Se supponiamo $E = G = \lambda$, oppure $E = \lambda\varphi(u)$, $G = \lambda\psi(v)$, essendo λ una funzione di u e di v, si avrà:

$$2\lambda \operatorname{sen}\theta\cos\theta.\theta' = \frac{\partial\lambda}{\partial v}v'\cos^2\theta - \frac{\partial\lambda}{\partial u}u'\operatorname{sen}^2\theta;$$

e supposto $\lambda = \alpha(u) + \beta(v)$ si ha:

$$\alpha'(u)u'\operatorname{sen}^2\theta + 2\alpha(u)\operatorname{sen}\theta\cos\theta.\theta' + 2\beta(v)\operatorname{sen}\theta\cos\theta.\theta' - \beta'(v)v'\cos^2\theta = 0,$$

che integrata dà:

$$\alpha(u)\operatorname{sen}^2\theta - \beta(v)\cos^2\theta = a,$$

a costante. In questo caso sono comprese le integrazioni dell'equazione della geodetica sulla sfera, sull'ellissoide, ecc.

Supponiamo che le linee per le quali $v =$ cost. sieno linee geodetiche; si potrà porre $E = 1$, e la equazione (3) diventa la

$$2\cot\theta.\theta' + \frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial u}u' = 0,$$

osservando essere

$$G' = \frac{\partial G}{\partial u}u' + \frac{\partial G}{\partial v}v';$$

se ritiensi G funzione della sola variabile u si avrà:

$$2\cot\theta.\theta' + \frac{1}{G}G' = 0,$$

che integrata dà

$$G\operatorname{sen}^2\theta = A,$$

A costante. Questo caso comprende le integrazioni dell'equazione della geodetica sulle superficie di rotazione, sull'elicoide gobba, ecc.

Pavia, li 22 marzo 1853.

[R.].

XII.

INTORNO AD ALCUNE FORMOLE CHE SI RISCONTRANO NELLA TEORICA DELLE SUPERFICIE.

Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, [illegible]

Le espressioni trovate, dapprima dal sig. Lamé, ed in seguito dai sigg. Bertrand, Bonnet, ecc., pei raggi di curvatura corrispondenti al punto comune intersezione di tre superficie ortogonali, furono recentemente dimostrate dal sig. Liouville *) quali casi particolari di altre espressioni, che si riscontrano nella ricerca delle grandezze dei raggi di curvatura delle sezioni normali corrispondenti al punto comune intersezione di tre superficie qualunque. A questo scopo, indicando con u, v, w tre parametri variabili esistenti nelle equazioni delle tre superficie, e ponendo

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=E_1, \qquad \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=F_1,$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=E_2, \qquad \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial w}=F_2,$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2=E_3, \qquad \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w}=F_3,$$

il sig. Liouville dà la formula per la grandezza del raggio di curvatura di una sezione normale per una qualunque di quelle tre superficie, per esempio per quella per la quale

*) Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. XVII (1852), p. 178.

$w =$ cost., formata mediante le E_1, E_2, E_3, F_1, F_2, F_3, e loro derivate, ed i parametri u, v. Analogamente si ponno ottenere le formole pei raggi di curvatura delle sezioni normali corrispondenti alle altre due superficie.

In questa breve Nota proponiamo un mezzo semplicissimo a dimostrare la formola enunciata dal sig. LIOUVILLE, col qual mezzo si ponno ottenere altre importanti formole approfittando delle note ricerche intorno alla teorica delle superficie. Osserviamo che, assumendo per brevità

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{vmatrix}, \quad H = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix},$$

si hanno le seguenti equazioni:

$$D H = L = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial E_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E_1}{\partial v} & \frac{\partial F_2}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E_1}{\partial w} \\ F_1 & E_2 & F_3 \\ E_1 & F_1 & F_2 \end{vmatrix},$$

$$D_1 H = M = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial E_1}{\partial v} & \frac{1}{2} \frac{\partial E_2}{\partial u} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F_3}{\partial u} + \frac{\partial F_2}{\partial v} - \frac{\partial F_1}{\partial w} \right) \\ F_1 & E_2 & F_3 \\ E_1 & F_1 & F_2 \end{vmatrix},$$

$$D_2 H = N = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial E_2}{\partial u} & \frac{1}{2} \frac{\partial E_2}{\partial v} & \frac{\partial F_3}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial E_2}{\partial w} \\ F_1 & E_2 & F_3 \\ E_1 & F_1 & F_2 \end{vmatrix},$$

$$H^2 = \begin{vmatrix} E_1 & F_1 & F_2 \\ F_1 & E_2 & F_3 \\ F_2 & F_3 & E_3 \end{vmatrix}.$$

Ora, la grandezza del raggio di curvatura di una sezione normale qualunque fatta alla superficie $w =$ cost. vien data dall'espressione:

$$\frac{1}{r} = \frac{D u'^2 + 2 D_1 u' v' + D_2 v'^2}{\Delta},$$

essendo

$$\Delta = \sqrt{E_1 E_2 - F_1^2};$$

quindi si avrà anche:

$$\frac{1}{r} = \frac{L u'^2 + 2 M u' v' + N v'^2}{\Delta H};$$

la quale è l'espressione data dal sig. LIOUVILLE.

Notiamo che, supposto essere $F_1 = F_2 = F_3 = 0$, cioè nel caso delle coordinate curvilinee ortogonali, si ha $M = 0$, e quindi $D_1 = 0$ non essendolo H; per cui le linee rappresentate dalle equazioni:

$$v = \text{cost.}, \quad w = \text{cost.}; \qquad u = \text{cost.}, \quad w = \text{cost.}$$

saranno linee di curvatura per la superficie $w =$ cost. Analogamente per le altre due superficie.

Lo stesso metodo conduce all'espressione della somma dei raggi reciproci di massima e minima curvatura per una qualunque fra quelle tre superficie. Infatti, indicando con r_1, r_2 i raggi di massima e di minima curvatura corrispondenti al punto di coordinate x, y, z della superficie $w =$ cost., si ha la nota equazione:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2 D_1 F_1 - D E_2 - D_2 E_1}{\Delta};$$

quindi si avrà:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2 M F_1 - L E_2 - N E_1}{\Delta H};$$

espressione formata colle E_1, E_2, E_3, F_1, F_2, F_3 e colle loro derivate. Supposto $F_1 = F_2 = F_3 = 0$, si ha:

$$M = 0, \quad L = \frac{1}{2} E_1 E_2 \frac{\partial E_1}{\partial w}, \quad N = \frac{1}{2} E_1 E_2 \frac{\partial E_2}{\partial w},$$

e quindi

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = - \frac{1}{2 \sqrt{E_3}} \frac{\partial \log E_1 E_2}{\partial w};$$

ed analogamente per le altre due superficie.

Nello stesso modo si potrebbero determinare i raggi dei circoli osculatori delle linee comuni intersezioni delle tre superficie, ed in generale si otterrebbero, formate colle E_1, E_2, ... e loro derivate, tutte quelle espressioni che contengono queste quantità e le D, D_1, D_2.

Pavia, li 26 maggio 1853

[C.].

XIII.

SULLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI ARBITRARIE NEI PROBLEMI DELLA DINAMICA.

Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, [illegible] IV [illegible]

Le ricerche di Eulero, di Lagrange e di Laplace intorno le variazioni degli elementi delle orbite dei pianeti furono il primo passo alla teorica della variazione delle costanti arbitrarie nei problemi della Dinamica. Le formole generali per le quali si hanno le variazioni delle costanti vennero trovate da Lagrange; esse dànno i valori delle derivate parziali rispetto alle costanti della funzione delle forze perturbatrici espressi per mezzo della somma dei prodotti delle derivate rispetto al tempo delle medesime costanti arbitrarie per alcune espressioni, la proprietà caratteristica delle quali si è di non contenere esplicitamente il tempo. Col mezzo di queste formole la ricerca della variazione delle costanti è ridotta alla risoluzione di molte equazioni di primo grado ad altrettante incognite. Allo scopo di evitare questa operazione Poisson pensò di esprimere le derivate delle costanti arbitrarie per mezzo delle derivate parziali della funzione delle forze perturbatrici, e le formole a cui giunse, le quali ponno dirsi le reciproche di quelle di Lagrange, contengono pure funzioni aventi la proprietà caratteristica identica alla esposta per quelle di Lagrange. I lavori più recenti di Cauchy, di Binet, ecc. sull'argomento contengono nuove dimostrazioni delle formole di Lagrange e di Poisson, ed applicazioni di esse a casi particolari. Devesi a Jacobi l'aver ridotte le formole per la ricerca delle variazioni delle costanti a semplicissima forma, od averle ridotte, come le denomina quell'autore, alla loro *forma canonica*. Quelle formole si dicono avere la forma canonica, allorquando si possa esprimere la derivata, rispetto al tempo, di una

qualsivoglia costante arbitraria, per la derivata parziale, rispetto ad un'altra costante, della funzione delle forze perturbatrici; vale a dire allorquando saranno eguali all'unità alcune di quelle funzioni dotate della proprietà enunciata, e le altre saranno nulle. LAGRANGE aveva già dimostrato alla sez. V^a della seconda parte della *Mécanique analitique* come ciò avvenga ogni qualvolta si assumano a costanti arbitrarie i valori iniziali delle coordinate, ed altre quantità dipendenti dai valori iniziali delle velocità componenti; questa osservazione non era sfuggita al POISSON; ma JACOBI in un teorema enunciato nel tomo V dei « Comptes Rendus », e dimostrato in seguito dal sig. DESBOVES, ha dato un altro sistema di costanti per le quali verificasi quella proprietà. Queste costanti arbitrarie sono quelle che si incontrano allorquando si determinano gli integrali di un problema di Dinamica col mezzo di una equazione alle derivate parziali del pr mo ordine come insegnarono HAMILTON e JACOBI.

È noto che, indicando con $q_1, q_2, \ldots q_n$ n variabili indipendenti, in funzione delle quali sieno date le coordinate dei punti di un sistema, con T la semisomma delle forze vive, con U la funzione delle forze, e con $p_1, p_2, \ldots p_n$ ordinatamente le espressioni $\frac{\partial T}{\partial q'_1}, \frac{\partial T}{\partial q'_2}, \ldots \frac{\partial T}{\partial q'_n}$, e denominando φ una soluzione completa della equazione alle derivate parziali del primo ordine

$$T - U + \frac{d\varphi}{dt} = 0, \tag{1}$$

le equazioni:

$$\left\{\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}, \ldots \quad p_n = \frac{\partial \varphi}{\partial q_n}, \\ \beta_1 &= \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1}, \quad \beta_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2}, \ldots \quad \beta_n = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_n}, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

sono le equazioni integrali del movimento; nelle quali $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ sono le n costanti introdotte dall'integrazione della equazione alle derivate parziali, ed insieme alle $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ sono le $2n$ costanti arbitrarie delle equazioni integrali del movimento.

Ora, indicando con $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_s}\right)$ la derivata totale della funzione φ rispetto ad α_s, si ha:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_s}\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_s} + \sum \frac{\partial \varphi}{\partial q_r} \frac{\partial q_r}{\partial \alpha_s}, \qquad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta_s}\right) = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial q_r} \frac{\partial q_r}{\partial \beta_s},$$

le quali equazioni, osservando alle superiori, si mutano nelle

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_s}\right) = \beta_s + \sum p_r \frac{\partial q_r}{\partial \alpha_s}, \qquad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta_s}\right) = \sum p_r \frac{\partial q_r}{\partial \beta_s}.$$

Si derivi la prima di queste equazioni rispetto a β_s, la seconda rispetto ad α_s, e sot-

traendo i risultamenti si ottiene la

$$\sum\left(\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_r}\frac{\partial q_i}{\partial \beta_r}-\frac{\partial p_i}{\partial \beta_r}\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_r}\right)=1.$$

Affatto analogamente si dimostrerebbero le altre tre equazioni seguenti:

$$(3)\qquad\begin{cases}\sum\left(\dfrac{\partial q_i}{\partial \alpha_r}\dfrac{\partial p_i}{\partial \alpha_s}-\dfrac{\partial q_i}{\partial \alpha_s}\dfrac{\partial p_i}{\partial \alpha_r}\right)=0,\\[2ex]\sum\left(\dfrac{\partial q_i}{\partial \beta_r}\dfrac{\partial p_i}{\partial \beta_s}-\dfrac{\partial q_i}{\partial \beta_s}\dfrac{\partial p_i}{\partial \beta_r}\right)=0,\\[2ex]\sum\left(\dfrac{\partial q_i}{\partial \alpha_s}\dfrac{\partial p_i}{\partial \beta_r}-\dfrac{\partial q_i}{\partial \beta_r}\dfrac{\partial p_i}{\partial \alpha_s}\right)=0.\end{cases}$$

I primi membri di queste equazioni sono i tipi di tutte quelle funzioni che entrano nelle formole generali date da LAGRANGE per la ricerca delle variazioni delle costanti arbitrarie.

La proprietà or ora dimostrata per le funzioni di LAGRANGE, sussiste anche per quelle che entrano a comporre le formole di POISSON; vale a dire alcune di esse si annullano identicamente, ed altre eguagliano l'unità. Dal confronto delle formole di perturbazione ridotte alla forma canonica con quelle trovate da POISSON, nasce spontanea la esposta osservazione; ma per distinguere quelle funzioni che annullansi da quelle che sono eguali all'unità, faremo uso di alcune formole dovute al sig. CAUCHY, le quali contengono le relazioni generali fra le funzioni di LAGRANGE e quelle di POISSON. Denominiamo $a_1, a_2, \ldots a_{2n}$ $2n$ costanti arbitrarie di un problema di Dinamica, e poniamo per brevità:

$$(a_r, a_s)=\sum\left(\frac{\partial p_i}{\partial a_r}\frac{\partial q_i}{\partial a_s}-\frac{\partial p_i}{\partial a_s}\frac{\partial q_i}{\partial a_r}\right),$$

$$[a_r, a_s]=\sum\left(\frac{\partial a_r}{\partial p_i}\frac{\partial a_s}{\partial q_i}-\frac{\partial a_r}{\partial q_i}\frac{\partial a_s}{\partial p_i}\right);$$

la seconda delle quali espressioni è il tipo delle funzioni di POISSON. Le formole dovute al sig. CAUCHY si ponno ridurre alle due seguenti:

$$\sum (a_s, a_r)[a_s, a_r]=1,\qquad \sum (a_s, a_r)[a_t, a_r]=0.$$

Quindi osservando alle equazioni (3) dedurremo facilmente che, supposte le costanti del problema essere le $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \beta_1, \beta_2, \ldots$, sussisteranno le equazioni:

$$(4)\qquad [\alpha_r, \beta_r]=1,\quad [\alpha_r, \beta_s]=0,\quad [\alpha_r, \alpha_s]=0,\quad [\beta_r, \beta_s]=0.$$

Ciò posto, se si ritengono le formole del moto non perturbato rappresentate dalle equazioni:

$$\left(\frac{dq_r}{dt}\right) = \frac{\partial(T-U)}{\partial p_r}, \qquad \left(\frac{dp_r}{dt}\right) = -\frac{\partial(T-U)}{\partial q_r},$$

nelle quali facciasi $r = 1, 2, \ldots n$, e le formole del moto perturbato rappresentate dalle

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial(T-U-P)}{\partial p_r}, \qquad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial(T-U-P)}{\partial q_r},$$

nelle quali P rappresenta la funzione perturbatrice, sussisteranno le equazioni:

$$\sum\left[\frac{\partial\alpha_s}{\partial q_r}\left(\frac{dq_r}{dt}\right) + \frac{\partial\alpha_s}{\partial p_r}\left(\frac{dp_r}{dt}\right)\right] = 0, \quad \sum\left(\frac{\partial\alpha_s}{\partial q_r}\frac{dq_r}{dt} + \frac{\partial\alpha_s}{\partial p_r}\frac{dp_r}{dt}\right) = \frac{d\alpha_s}{dt},$$

e per conseguenza:

$$\frac{d\alpha_s}{dt} = \sum\left(\frac{\partial\alpha_s}{\partial p_r}\frac{\partial P}{\partial q_r} - \frac{\partial\alpha_s}{\partial q_r}\frac{\partial P}{\partial p_r}\right).$$

Ora si osservi essere

$$\frac{\partial P}{\partial q_r} = \sum\left(\frac{\partial P}{\partial\alpha_i}\frac{\partial\alpha_i}{\partial q_r} + \frac{\partial P}{\partial\beta_i}\frac{\partial\beta_i}{\partial q_r}\right), \quad \frac{\partial P}{\partial p_r} = \sum\left(\frac{\partial P}{\partial\alpha_i}\frac{\partial\alpha_i}{\partial p_r} + \frac{\partial P}{\partial\beta_i}\frac{\partial\beta_i}{\partial p_r}\right),$$

per cui, sostituendo ed avendo riguardo alle equazioni (4), si ha:

$$\frac{d\alpha_s}{dt} = \frac{\partial P}{\partial\beta_s}.$$

Le formole per la variazione delle costanti ridotte alla loro forma canonica sono quindi le:

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha_1}{dt} = \dfrac{\partial P}{\partial\beta_1}, & \dfrac{d\alpha_2}{dt} = \dfrac{\partial P}{\partial\beta_2}, \quad \ldots \dfrac{d\alpha_n}{dt} = \dfrac{\partial P}{d\beta_n}, \\[2ex] \dfrac{d\beta_1}{dt} = -\dfrac{\partial P}{\partial\alpha_1} & \dfrac{d\beta_2}{dt} = -\dfrac{\partial P}{\partial\alpha_2}, \ldots \dfrac{d\beta_n}{dt} = -\dfrac{\partial P}{\partial\alpha_n}. \end{cases}$$

Osserviamo che, allorquando U non contenga esplicitamente il tempo, e quindi abbia luogo il principio delle forze vive, si ha:

$$T - U = \alpha_r,$$

e che, supponendo essere la funzione ψ una soluzione completa di ques'ultima equazione, gli integrali del problema sono dati dalle

$$(6)\quad \begin{cases} p_1 = \dfrac{\partial\psi}{\partial q_1}, & p_2 = \dfrac{\partial\psi}{\partial q_2}, \ldots p_n = \dfrac{\partial\psi}{\partial q_n}, \\[2ex] \beta_1 = \dfrac{\partial\psi}{\partial\alpha_1}, \ldots & \beta_r + t = \dfrac{\partial\psi}{\partial\alpha_r}, \ldots \beta_n = \dfrac{\partial\psi}{\partial\alpha_n}; \end{cases}$$

ma le equazioni (4) sussisteranno ancora, e le (5) daranno ancora la variazione delle costanti. La proprietà caratteristica delle funzioni $[a_i, a_s]$ di rimanere costanti per tutta la durata del movimento venne da JACOBI considerata come utile mezzo nella ricerca degli integrali dei problemi di Dinamica. Infatti, in una lettera diretta da quel celebre autore all'Accademia delle Scienze di Parigi poco tempo dopo la morte di POISSON, a proposito della proprietà di quelle funzioni enuncia il seguente teorema: « Supponendo « che in un problema di Dinamica abbia luogo il principio delle forze vive, se si cono- « scono due altri integrali, oltre l'integrale fornito da questo principio, se ne può dedurre « un terzo in un modo diretto, e senza neppure fare uso di quadrature. Continuando « il medesimo processo si otterrà un quarto, un quinto integrale, e così via ».

Il processo a cui allude JACOBI si è di approfittare della proprietà della funzione $[a_r, a_s]$, formata mediante le due costanti dei due integrali conosciuti, coll'eguagliarla ad una terza costante arbitraria, ed ottenere così in generale un altro integrale. POISSON aveva già osservato come questa terza costante arbitraria potrà in alcuni casi ridursi ad una costante determinata, e JACOBI nella lettera citata fa riflettere come quel terzo, quarto, ... integrali ottenuti in quel modo potranno in questioni particolari risultare da combinazioni dei già trovati. BERTRAND, in un recente lavoro sulla integrazione delle equazioni della Dinamica *), giunse a dimostrare come questi due casi rientrino l'uno nell'altro, e come possano esistere, per un problema qualunque di Dinamica, integrali che soddisfano all'una od all'altra delle equazioni:

$$(7) \qquad [a_r, a_s] = 1, \qquad [a_r, a_s] = 0.$$

Poggiando sulla dimostrata possibilità di ridursi identiche queste due ultime equazioni, il sig. BERTRAND deduce un metodo per la ricerca degli integrali di un problema, allorquando uno o più di essi siano conosciuti, e lo applica vantaggiosamente in varj casi particolari. Infatti, supponendo che a_s fosse costante arbitraria di un integrale conosciuto, le equazioni (7) sono equazioni alle derivate parziali del primo ordine e lineari, le quali in molti casi particolari saranno integrabili, e forniranno altri integrali del problema. Se consideriamo ora che, supposte le costanti $a_1, a_2, \dots a_{2n}$ rispettivamente eguali alle $\alpha_1, \alpha_2, \dots \beta_1, \beta_2, \dots$ sussistono identicamente le equazioni (4), è chiaro che per tutti gli integrali di un problema di Dinamica potranno verificarsi equazioni analoghe alle (7); e che in questo caso gl'integrali medesimi saranno quelli che si ottengono col metodo di HAMILTON. In questo modo viene a generalizzarsi l'importante processo dovuto al sig. BERTRAND, e viene determinato un sistema di costanti arbitrarie pel quale esso ha luogo.

---

*) Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. XVII (1852), p. 393.

Per rendere più chiaro il nesso fra gli integrali ottenuti col metodo di HAMILTON, e quelli che si hanno dal metodo di BERTRAND, incominceremo dal considerare il movimento di un punto materiale attratto da un centro fisso, supponendo la grandezza dell'azione essere una funzione del raggio vettore. Le equazioni alle derivate rappresentanti questo movimento sono:

$$\frac{dx}{dt} = x', \qquad \frac{dy}{dt} = y', \qquad \frac{dx'}{dt} = -\varphi(r)\frac{x}{r}, \qquad \frac{dy'}{dt} = -\varphi(r)\frac{y}{r}.$$

Il principio delle forze vive dà:

$$x'^2 + y'^2 = 2(U + \alpha_1),$$

essendo $U = -\int\varphi(r)dr$, ed α_1 una costante. Pel noto metodo di HAMILTON, fatto

$$x' = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad y' = \frac{\partial\psi}{\partial y},$$

la equazione alle derivate parziali sarà:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 = 2(U + \alpha_1).$$

Un integrale di questa equazione essendo

$$\psi = \alpha_2 \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} + \int\frac{\sqrt{2(U+\alpha_1)r^2 - \alpha_2^2}}{r}dr,$$

nella quale α_2 è una nuova costante, gli integrali del problema saranno:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_1} = \int\frac{r}{\sqrt{2(U+\alpha_1)r^2 - \alpha_2^2}}dr = \beta_1 + t,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_2} = \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} - \int\frac{\alpha_2}{r\sqrt{2(U+\alpha_1)r^2 - \alpha_2^2}}dr = \beta_2.$$

Gl'integrali *intermedj* sarebbero dati dalle equazioni:

$$x' = -\alpha_2\frac{y}{r^2} + \frac{\sqrt{2(U+\alpha_1)r^2 - \alpha_2^2}}{r}\frac{x}{r},$$

$$y' = \alpha_2\frac{x}{r^2} + \frac{\sqrt{2(U+\alpha_1)r^2 - \alpha_2^2}}{r}\frac{y}{r}.$$

Dalle quali si ha il quarto integrale:

$$xy' - x'y = \alpha_2.$$

Ora osserviamo, che, per quanto si è dimostrato, le funzioni di Poisson per questo caso particolare devono avere i valori:

$$(8)\qquad [\alpha_1, \beta_1] = 1, \quad [\alpha_2, \beta_2] = 1, \quad [\alpha_1, \alpha_2] = [\alpha_1, \beta_2] = [\alpha_2, \beta_1] = [\beta_1, \beta_2] = 0.$$

Il prof. Bertrand applicando il suo metodo a questo caso ammette l'integrale del principio delle aree; e quindi le equazioni alle derivate parziali di primo ordine e lineari sono le due:

$$(9)\qquad [\alpha_2, a] = 0, \qquad [\alpha_2, b] = 1,$$

essendo a, b costanti arbitrarie. L'integrazione della prima di queste equazioni conduce quell'autore a due nuovi integrali, di cui l'uno è una combinazione degli integrali del principio delle aree e di quello delle forze vive, e l'altro dà il valore del tempo; e la integrazione della seconda dà l'equazione della trajettoria. Ora vedesi facilmente come i medesimi tre integrali corrispondono alle tre equazioni:

$$(10)\qquad [\alpha_1, \alpha_2] = 0, \qquad [\alpha_2, \beta_1] = 0, \qquad [\alpha_2, \beta_2] = 1,$$

le quali sono, fra le sei equazioni (8), le sole tre in cui entri la costante α_2. Dunque la integrazione delle due equazioni (9) alle derivate parziali lineari dà risultamenti identici a quelli ottenuti coll'integrare l'equazione di Hamilton.

Consideriamo ora il movimento di un punto materiale in un piano, essendo

$$U = \frac{1}{r^2}\varphi(\tang \omega)$$

la funzione delle forze. È il secondo esempio discusso dal sig. Bertrand. Si avrà:

$$r'^2 + r^2\omega'^2 = 2\left(\frac{1}{r^2}\varphi(\tang \omega) + \alpha_1\right),$$

e quindi l'equazione di Hamilton sarà:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \omega}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{r^2}\varphi(\tang \omega) + \alpha_1\right),$$

una soluzione completa della quale è la

$$\psi = \int \frac{\sqrt{2\alpha_1 r^2 - \alpha_2}}{r}\, dr + \int \sqrt{2\varphi(\tang \omega) + \alpha_2}\, d\omega,$$

essendo α_2 una nuova costante. Gli integrali del problema saranno:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1} = \frac{\sqrt{2\alpha_1 r^2 - \alpha_2}}{2\alpha_1} = t + \beta_1,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \operatorname{ang\,tang} r\,\frac{\sqrt{2\alpha_1} - \sqrt{2\alpha_1 r^2 - \alpha_2}}{\sqrt{\alpha_2}} + \int \frac{1}{2\sqrt{2\varphi(\tang \omega) + \alpha_2}}\, d\omega = \beta_2.$$

Gl'integrali intermedj verranno dati dalle equazioni:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\sqrt{2\alpha_1 r^2 - \alpha_2}}{r}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial \omega} = \sqrt{2\varphi(\operatorname{tang}\omega) + \alpha_2}$$

ed essendo $\frac{\partial \psi}{\partial \omega} = r^2 \omega'$ la costante arbitraria α_2 appartiene all'integrale del principio delle aree. Le (9) sono le equazioni da cui parte il sig. BERTRAND nella trattazione di questo esempio, e le (10) si verificheranno per esso.

Applicheremo ora il metodo del signor BERTRAND alla ricerca delle circostanze del moto di un punto sopra una superficie. Immaginando sulla superficie due sistemi di linee ortogonali rappresentati dalle equazioni $u =$ cost., $v =$ cost., e supponendo che le linee del secondo sistema sieno geodetiche, si avrà:

$$T = \frac{1}{2}(u'^2 + G v'^2).$$

Supporremo essere G funzione della sola variabile u, e ciò aver anche luogo per la funzione delle forze che denomineremo U. Posto

$$p = \frac{\partial T}{\partial u'}, \qquad q = \frac{\partial T}{\partial v'},$$

le equazioni del moto saranno:

$$\frac{du}{dt} = p, \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{1}{G} q, \qquad \frac{dp}{dt} = \frac{dU}{du} - \frac{1}{2}\frac{dG}{du} v'^2, \qquad \frac{dq}{dt} = 0,$$

ed il principio delle forze vive dà:

$$u'^2 + G v'^2 = 2(U + \alpha_1).$$

Dall'ultima delle equazioni superiori si ha un secondo integrale del problema, cioè:

$$q = G v' = \alpha_2.$$

Sia

$$a = \varphi(u, v, p, q, t)$$

un altro integrale; formata la equazione $[a, \alpha_2] = 0$, si ottiene $\frac{\partial a}{\partial v} = 0$, quindi si avranno per a l'una o l'altra delle due forme:

$$(11) \qquad \begin{cases} a = \psi(u, p, q), \\ a = t + \psi(u, p, q); \end{cases}$$

e formata la equazione $[b, \alpha_2] = 1$ si hanno le

$$(12) \qquad \begin{cases} b = v + f(u, p, q), \\ b = t + v + f(u, p, q). \end{cases}$$

La prima delle (11), derivata rispetto a t, avuto riguardo alle equazioni del movimento, dà

$$\frac{\partial a}{\partial u} p + \frac{\partial a}{\partial p}\left(\frac{dU}{du} - \frac{1}{2}\frac{dG}{du} v'^2\right) = 0,$$

la quale integrata dà

$$a = F\left[p^2 - 2\left(U - \frac{1}{2} G v'^2\right)\right] = F(2\alpha_1),$$

cioè la costante a è una funzione della costante delle forze vive. La seconda delle (11) dà

$$1 + \frac{\partial a}{\partial u} p + \frac{\partial a}{\partial p}\left(\frac{dU}{du} - \frac{1}{2}\frac{dG}{du} v'^2\right) = 0;$$

e quindi

$$a = t + \int \frac{1}{\sqrt{2(U+\alpha_1) - \frac{\alpha_2^2}{G}}} du,$$

trascurando una funzione arbitraria della costante α_1. Questa equazione dà il valore del tempo, ed è un terzo integrale del problema. La prima delle (12) dà

$$-G\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\alpha_2}{p}, \qquad p = \sqrt{2(U+\alpha_1) - \frac{\alpha_2^2}{G}};$$

quindi

$$b = v - \int \frac{\alpha_2}{G\sqrt{2(U+\alpha_1) - \frac{\alpha_2^2}{G}}} du,$$

che è il quarto integrale del problema. La seconda delle equazioni (12) darebbe evidentemente una combinazione di questi due ultimi integrali.

Queste formole sono applicabili allorquando la superficie sia di rotazione, e la forza acceleratrice si supponga diretta ad ogni istante del tempo nel piano del meridiano corrispondente al punto della superficie in cui trovasi il mobile; e si giunge così ai risultati ottenuti dal sig. Jacobi.

A riscontro dei metodi osserviamo che in questo esempio la equazione di Hamilton avrebbe la forma:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{G}\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2 = 2(U+\alpha_1),$$

la quale nelle poste condizioni è soddisfatta dalla

$$\psi = \alpha_2 v + \int \sqrt{2(U+\alpha_1) - \frac{\alpha_2^2}{G}}\, du,$$

e quindi gli integrali del problema saranno:

$$\frac{\partial\psi}{\partial u} = \sqrt{2(U+\alpha_1) - \frac{\alpha_2^2}{G}} = p, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial v} = \alpha_2 = q,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_1} = \int \frac{1}{\sqrt{2(U+\alpha_1) - \frac{\alpha_2^2}{G}}}\, du = \beta_1 + t,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_2} = v - \int \frac{\alpha_2}{G\sqrt{2(U+\alpha_1) - \frac{\alpha_2^2}{G}}}\, du = \beta_2,$$

i quali appunto corrispondono ai trovati più sopra.

La dimostrata proprietà per le espressioni $[\alpha_r, \beta_r]$, conduce alla generalizzazione di un teorema dimostrato da Jacobi pel movimento ellittico dei pianeti, e dal medesimo autore enunciato come generale per un movimento qualunque, supposte però le costanti arbitrarie essere i valori iniziali delle quantità variabili che entrano nel problema. Infatti, sussistendo identicamente la

$$\sum_s \left(\frac{\partial\alpha_r}{\partial p_s}\frac{\partial\beta_r}{\partial q_s} - \frac{\partial\alpha_r}{\partial q_s}\frac{\partial\beta_r}{\partial p_s}\right) = 1,$$

saranno anco soddisfatte le

$$p_1' : p_2' : \ldots : q_1' : q_2' : \ldots : \alpha_r' = \frac{\partial\beta_r}{\partial q_1} : \frac{\partial\beta_r}{\partial q_2} : \ldots : -\frac{\partial\beta_r}{\partial p_1} : -\frac{\partial\beta_r}{\partial p_2} : \ldots : 1,$$

dalle quali si hanno le

$$\frac{\partial p_s}{\partial\alpha_r} = \frac{\partial\beta_r}{\partial q_s}, \qquad \frac{\partial q_s}{\partial\alpha_r} = -\frac{\partial\beta_r}{\partial p_s}.$$

Queste ultime equazioni contengono il teorema di Jacobi *) per cui quel teorema ha luogo anche allorquando le costanti arbitrarie sieno quelle date dal metodo di **Hamilton**.

Le relazioni trovate fra la equazione (1) e le equazioni (4) si ponno estendere in generale alle equazioni a derivate parziali, considerando le relazioni stabilite dal sig. Jacobi fra una equazione qualsivoglia a derivate parziali e le equazioni analoghe alle (2) ottenute mediante una soluzione completa di essa.

Pavia, li 27 giugno 1853.

[C.].

---

*) Jacobi, *Neues Theorem der analytischen Mechanik*. (Mathematische Werke, t. I).

XIV.

INTORNO AD UN TEOREMA DI MECCANICA ANALITICA.

Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, [illegible] IV [illegible]

Indicando con $q_1, q_2, \ldots q_n$ n variabili indipendenti, con T la semisomma delle forze vive, con U la funzione delle forze, e con $p_1, p_2, \ldots p_n$ ordinatamente le espressioni

$$\frac{\partial T}{\partial q_1'}, \quad \frac{\partial T}{\partial q_2'}, \quad \ldots \quad \frac{\partial T}{\partial q_n'},$$

le equazioni del movimento assumono, come è noto, la forma:

$$(1) \qquad \frac{d q_r}{d t} = \frac{\partial (T - U)}{\partial p_r}, \qquad \frac{d p_r}{d t} = - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_r},$$

nelle quali facciasi $r = 1, 2, 3, \ldots n$.

Se $a = \varphi$, $b = \psi$ sono due integrali di quelle equazioni alle derivate, ha luogo, come è noto, la proprietà che

$$\sum \left(\frac{\partial a}{\partial p_r} \frac{\partial b}{\partial q_r} - \frac{\partial a}{\partial q_r} \frac{\partial b}{\partial p_r} \right) = \text{cost.}$$

Questo importante teorema dovuto a Poisson, venne indicato da Jacobi come mezzo di ricerca degli integrali nei problemi di Dinamica **). Il sig. Bertrand, in un lavoro

*) Per errore di numerazione negli « Annali » dalla pagina 395 si passa alla pagina 398.

**) Bertrand, *Mémoire sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique* [Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. XVII (1852), p. 393]. — Brioschi [XIII, pp. 73-82].

comunicato recentemente all'Accademia delle Scienze di Parigi *), ha enunciato un nuovo teorema analogo a quello di Poisson, la dimostrazione e generalizzazione del quale teorema formano lo scopo di questa Nota. Il teorema del sig. Bertrand è il seguente:

« Se $\qquad \alpha = \varphi_1 , \qquad \beta = \varphi_2 , \qquad \gamma = \varphi_3 , \qquad \delta = \varphi_4 ,$

« sono quattro integrali di un problema di Dinamica, la espressione

$$(2) \qquad \sum_r \sum_s \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial p_r} & \frac{\partial \alpha}{\partial q_r} & \frac{\partial \alpha}{\partial p_s} & \frac{\partial \alpha}{\partial q_s} \\ \frac{\partial \beta}{\partial p_r} & \frac{\partial \beta}{\partial q_r} & \frac{\partial \beta}{\partial p_s} & \frac{\partial \beta}{\partial q_s} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial p_r} & \frac{\partial \gamma}{\partial q_r} & \frac{\partial \gamma}{\partial p_s} & \frac{\partial \gamma}{\partial q_s} \\ \frac{\partial \delta}{\partial p_r} & \frac{\partial \delta}{\partial q_r} & \frac{\partial \delta}{\partial p_s} & \frac{\partial \delta}{\partial q_s} \end{vmatrix},$$

« nella quale pongasi $r = 1, 2, 3, \ldots n$; $s = 1, 2, 3, \ldots n$, sarà costante per tutta « la durata del movimento; per cui indicandola con $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, la equazione

$$(3) \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \text{cost.}$$

« sarà un quinto integrale od una identità ».

Osserviamo che il determinante dell'espressione (2) eguaglia la somma dei prodotti a due a due dei determinanti binarj che si ottengono combinando opportunamente gli elementi del determinante medesimo, per cui si ha che quella espressione (2) è eguale alla seguente:

$$\sum_r \sum_s \left\{ \begin{aligned} & \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial p_r} & \frac{\partial \alpha}{\partial q_r} \\ \frac{\partial \beta}{\partial p_r} & \frac{\partial \beta}{\partial q_r} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial \gamma}{\partial p_s} & \frac{\partial \gamma}{\partial q_s} \\ \frac{\partial \delta}{\partial p_s} & \frac{\partial \delta}{\partial q_s} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial p_r} & \frac{\partial \alpha}{\partial q_r} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial p_r} & \frac{\partial \gamma}{\partial q_r} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial \beta}{\partial p_s} & \frac{\partial \beta}{\partial q_s} \\ \frac{\partial \delta}{\partial p_s} & \frac{\partial \delta}{\partial q_s} \end{vmatrix} \\ + & \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial p_r} & \frac{\partial \alpha}{\partial q_r} \\ \frac{\partial \delta}{\partial p_r} & \frac{\partial \delta}{\partial q_r} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial \beta}{\partial p_s} & \frac{\partial \beta}{\partial q_s} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial p_s} & \frac{\partial \gamma}{\partial q_s} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \beta}{\partial p_r} & \frac{\partial \beta}{\partial q_r} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial p_r} & \frac{\partial \gamma}{\partial q_r} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial p_s} & \frac{\partial \alpha}{\partial q_s} \\ \frac{\partial \delta}{\partial p_s} & \frac{\partial \delta}{\partial q_s} \end{vmatrix} \\ - & \begin{vmatrix} \frac{\partial \beta}{\partial p_r} & \frac{\partial \beta}{\partial q_r} \\ \frac{\partial \delta}{\partial p_r} & \frac{\partial \delta}{\partial q_r} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial p_s} & \frac{\partial \alpha}{\partial q_s} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial p_s} & \frac{\partial \gamma}{\partial q_s} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \gamma}{\partial p_r} & \frac{\partial \gamma}{\partial q_r} \\ \frac{\partial \delta}{\partial p_r} & \frac{\partial \delta}{\partial q_r} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial p_s} & \frac{\partial \alpha}{\partial q_s} \\ \frac{\partial \beta}{\partial p_s} & \frac{\partial \beta}{\partial q_s} \end{vmatrix} \end{aligned} \right\},$$

*) Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XXXV (1852), p. 698.

e quindi si avrà:

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 2[(\alpha, \beta)(\gamma, \delta) + (\alpha, \gamma)(\delta, \beta) + (\alpha, \delta)(\beta, \gamma)], \tag{4}$$

ed in conseguenza del teorema di POISSON ne risulterà l'equazione (3).

È chiaro pel processo di dimostrazione, di cui si è fatto uso, che il teorema del sig. BERTRAND può essere generalizzato allorquando si considerino sei, otto ... integrali di un problema. Difatti le espressioni che in questi casi terranno il luogo della $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ saranno decomponibili in somme di prodotti a tre a tre, a quattro a quattro, ecc. di espressioni della forma di quelle di POISSON, e quindi godranno della conosciuta proprietà di queste. Per esempio, se α, β, γ, δ, η, ξ fossero sei costanti di un problema di Dinamica, si avrebbe la relazione:

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \xi) = 3[(\alpha, \beta)(\gamma, \delta, \eta, \xi) + (\alpha, \gamma)(\beta, \delta, \xi, \eta)$$
$$+ (\alpha, \delta)(\beta, \gamma, \eta, \xi) + (\alpha, \eta)(\beta, \gamma, \xi, \delta) + (\alpha, \xi)(\beta, \gamma, \delta, \eta)] = \text{cost.}$$

Le costanti alle quali si sono dimostrate eguali le espressioni analoghe alle $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ hanno valori determinati allorquando le costanti $\alpha, \beta, \dots$ sieno i valori iniziali degli elementi del moto, oppure sieno quelli forniti dal metodo di HAMILTON. Se

$$p_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}, \dots p_n = \frac{\partial \varphi}{\partial q_n},$$

$$\beta_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1}, \quad \beta_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2}, \dots \beta_n = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_n},$$

sono gli integrali delle equazioni (1), si avrebbero facilmente le

$$(\alpha_r, \beta_r, \alpha_s, \beta_s) = 2,$$

$$(\alpha_r, \beta_r, \alpha_s, \beta_t) = 0,$$

$$(\alpha_r, \beta_s, \alpha_t, \beta_u) = 0,$$

ponendo nella equazione (4) i valori corrispondenti delle funzioni di POISSON.

Pavia, li 4 settembre 1853.

[C., G.].

XV.

INTORNO AD ALCUNI TEOREMI DI GEOMETRIA.

Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, tomo IV (1853), pp. 457-[illegible].

PARTE PRIMA.

Dalla teorica dei determinanti, ponendo:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_1\beta - \alpha\beta_1 & \alpha_2\beta - \alpha\beta_2 & \alpha_3\beta - \alpha\beta_3 & \dots \\ 0 & \beta_1\gamma - \beta\gamma_1 & \beta_2\gamma - \beta\gamma_2 & \beta_3\gamma - \beta\gamma_3 & \dots \\ 0 & \gamma_1\delta - \gamma\delta_1 & \gamma_2\delta - \gamma\delta_2 & \gamma_3\delta - \gamma\delta_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

$$B = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots \\ \beta & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots \\ \gamma & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \dots \\ \delta & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}, \qquad C = \begin{vmatrix} \lambda & \beta & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -\alpha & \gamma & 0 & \dots \\ \nu & 0 & -\beta & \delta & \dots \\ \xi & 0 & 0 & -\gamma & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

e supponendo che le indeterminate λ, μ, ν, ξ, ... soddisfino le equazioni:

$$\begin{aligned} \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu + \delta\xi + \dots &= 1, \\ \alpha_1\lambda + \beta_1\mu + \gamma_1\nu + \delta_1\xi + \dots &= 0, \\ \alpha_2\lambda + \beta_2\mu + \gamma_2\nu + \delta_2\xi + \dots &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

si ha
$$A = BC \text{ *)}.$$

Notisi che, ritenendo essere n il numero delle α, α_1, α_2, ..., risulta:
$$C = (-1)^{n-1}\beta\gamma\delta\ldots,$$
e quindi, supposte
$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = \ldots = 1$$
e considerando solamente i primi sedici elementi del determinante B, si ha:

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_1-\beta_1 & \alpha_2-\beta_2 & \alpha_3-\beta_3 \\ \beta_1-\gamma_1 & \beta_2-\gamma_2 & \beta_3-\gamma_3 \\ \gamma_1-\delta_1 & \gamma_2-\delta_2 & \gamma_3-\delta_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 1 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 1 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ 1 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{vmatrix}.$$

Il determinante del secondo membro rappresenta il sestuplo del volume della piramide, i vertici della quale hanno per coordinate le
$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3;\quad \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3;\quad \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3;\quad \delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3.$$

Ora, se con λ, μ, ν si indicano le lunghezze di quegli spigoli di essa piramide, i quali hanno i termini nel primo e secondo, secondo e terzo, terzo e quarto, dei punti suddetti, e se con a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3 si indicano i coseni degli angoli che quegli spigoli fanno ordinatamente cogli assi ortogonali, dall'equazione (1) si avrà:
$$\lambda\mu\nu \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \pm 6V;$$
e quindi, essendo
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & (\lambda\mu) & (\lambda\nu) \\ (\lambda\mu) & 1 & (\mu\nu) \\ (\lambda\nu) & (\mu\nu) & 1 \end{vmatrix},$$
nella quale $(\lambda\mu)$ indica il coseno dell'angolo compreso dagli spigoli λ, μ, risulta:
$$V = \frac{1}{6}\lambda\mu\nu\sqrt{1-(\lambda\mu)^2-(\lambda\nu)^2-(\mu\nu)^2+2(\lambda\mu)(\lambda\nu)(\mu\nu)}.$$

Osserviamo che, indicando con ω, θ, η i coseni degli angoli che una perpendicolare al piano determinato dagli spigoli di λ, μ fa cogli assi, si hanno le relazioni:
$$(2)\qquad \omega = \pm\frac{b_1c_2-b_2c_1}{\operatorname{sen}\lambda\mu},\quad \theta = \pm\frac{c_1a_2-c_2a_1}{\operatorname{sen}\lambda\mu},\quad \eta = \pm\frac{a_1b_2-a_2b_1}{\operatorname{sen}\lambda\mu};$$

*) Di queste relazioni fece già uso il sig. HERMITE in una importante ricerca nella teoria dei numeri. *Vedi:* Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. XIV (1849), p. 21.

quindi

$$(3)\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \pm \operatorname{sen} \lambda\mu (a_3 \omega + b_3 \theta + c_3 \eta) = \pm \operatorname{sen} \lambda\mu \operatorname{sen} \lambda\nu \operatorname{sen} (\lambda\mu, \mu\nu),$$

nella quale il simbolo $(\lambda\mu, \mu\nu)$ dinota l'angolo diedro compreso dalle faccie determinate dagli spigoli di λ, μ; μ, ν. Si avrà per conseguenza:

$$V = \frac{1}{6} \lambda\mu\nu \operatorname{sen} \lambda\mu \operatorname{sen} \mu\nu \operatorname{sen} (\lambda\mu, \mu\nu),$$

e da questa, se con A, B si denotano le aree di quelle faccie, si avrà la nota formola:

$$V = \frac{2}{3} \frac{AB}{\mu} \operatorname{sen} (\lambda\mu, \mu\nu).$$

Se con λ_1, μ_1, ν_1 si indicano gli spigoli della piramide che uniscono i punti secondo e quarto, quarto e primo, primo e terzo, e con a', b', c', ... si indicano i coseni degli angoli che gli spigoli medesimi fanno coi tre assi, osservando all'equazione:

$$(4)\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\lambda\lambda_1) & (\lambda\mu_1) & (\lambda\nu_1) \\ (\mu\lambda_1) & (\mu\mu_1) & (\mu\nu_1) \\ (\nu\lambda_1) & (\nu\mu_1) & (\nu\nu_1) \end{vmatrix}$$

e chiamando H per brevità il determinante del secondo membro, si avrà:

$$V^2 = \frac{1}{36} \lambda\mu\nu\lambda_1\mu_1\nu_1 H.$$

Questa penultima equazione, avuto riguardo alla (3), dà facilmente:

$$\operatorname{sen} \lambda\mu \operatorname{sen} \lambda_1\mu_1 \operatorname{sen} \mu\nu \operatorname{sen} \mu_1\nu_1 \operatorname{sen} (\lambda\mu, \mu\nu) \operatorname{sen} (\lambda_1\mu_1, \mu_1\nu_1) = H,$$

singolare relazione la quale venne già dimostrata dal chiarissimo sig. prof. BORDONI in una nota alla seconda edizione del *Trattato di Geodesia*. Chiamo R, S i determinanti del primo membro delle (4) ed ω_1, θ_1, η_1 i coseni degli angoli che la perpendicolare al piano determinato dagli spigoli λ_1, μ_1 fa coi tre assi; dalla medesima equazione (4) si ha:

$$\frac{\partial R}{\partial a_3} \frac{\partial S}{\partial a'''} + \frac{\partial R}{\partial b_3} \frac{\partial S}{\partial b'''} + \frac{\partial R}{\partial c_3} \frac{\partial S}{\partial c'''} = \frac{\partial H}{\partial (\nu\nu_1)},$$

ossia, avuto riguardo alle equazioni (2):

$$\operatorname{sen} \lambda\mu \operatorname{sen} \lambda_1\mu_1 (\omega\omega_1 + \theta\theta_1 + \eta\eta_1) = (\lambda\lambda_1)(\mu\mu_1) - (\lambda\mu_1)(\mu\lambda_1),$$

od anche

$$\operatorname{sen} \lambda\mu \operatorname{sen} \lambda_1\mu_1 \cos (\lambda\mu, \lambda_1\mu_1) = (\lambda\lambda_1)(\mu\mu_1) - (\lambda\mu_1)(\mu\lambda_1).$$

Questa relazione e le sue analoghe sono pure dovute al sig. prof. Bordoni.

Indicando con h la minima distanza fra gli spigoli opposti λ, ν, il primo membro dell'equazione (1) è eguale a

$$h\lambda\nu \operatorname{sen} \lambda\nu;$$

quindi si avrà la nota formola:

$$V = \pm \frac{1}{6} h\lambda\nu \operatorname{sen} \lambda\nu.$$

Considerando i primi sei elementi della formola (1), e posto

$$\alpha_1 = \frac{x_1}{a}, \quad \beta_1 = \frac{x_2}{a}, \quad \gamma_1 = \frac{x_3}{a},$$

$$\alpha_2 = \frac{y_1}{b}, \quad \beta_2 = \frac{y_2}{b}, \quad \gamma_2 = \frac{y_3}{b},$$

si ha l'equazione:

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} \frac{x_1 - x_2}{a} & \frac{y_1 - y_2}{b} \\ \frac{x_2 - x_3}{a} & \frac{y_2 - y_3}{b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{x_1}{a} & \frac{y_1}{b} \\ 1 & \frac{x_2}{a} & \frac{y_2}{b} \\ 1 & \frac{x_3}{a} & \frac{y_3}{b} \end{vmatrix}.$$

Se si suppongono x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 essere coordinate di tre punti situati sopra la ellisse di cui i semiassi sono a, b, indicando con A l'area del triangolo avente i vertici in quei tre punti il secondo membro di quest'ultima equazione è eguale a

$$\pm \frac{2A}{ab}.$$

Ora, se con λ, μ, ν si indicano i lati del triangolo, con l, m, n i semidiametri paralleli, si hanno:

$$\frac{(x_1 - x_2)^2}{a^2} + \frac{(y_1 - y_2)^2}{b^2} = \frac{\nu^2}{n^2},$$

$$\frac{(x_3 - x_1)^2}{a^2} + \frac{(y_3 - y_1)^2}{b^2} = \frac{\mu^2}{m^2},$$

$$\frac{(x_2 - x_3)^2}{a^2} + \frac{(y_2 - y_3)^2}{b^2} = \frac{\lambda^2}{l^2};$$

quindi quadrando la equazione (5) si avrà:

$$\frac{4A^2}{a^2 b^2} = \begin{vmatrix} \frac{\nu^2}{n^2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\mu^2}{m^2} - \frac{\lambda^2}{l^2} - \frac{\nu^2}{n^2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\mu^2}{m^2} - \frac{\lambda^2}{l^2} - \frac{\nu^2}{n^2}\right) & \frac{\lambda^2}{l^2} \end{vmatrix},$$

da cui

$$A = \frac{1}{4} a b \sqrt{\left(\frac{\lambda}{l} + \frac{\mu}{m} + \frac{\nu}{n}\right)\left(\frac{\lambda}{l} + \frac{\mu}{m} - \frac{\nu}{n}\right)\left(\frac{\lambda}{l} - \frac{\mu}{m} - \frac{\nu}{n}\right)\left(-\frac{\lambda}{l} + \frac{\mu}{m} + \frac{\nu}{n}\right)}.$$

Rammentando la espressione dell'area di un triangolo inscritto in una ellisse dovuta a Mac-Cullagh ed a Joachimsthal, la quale è

$$A = \frac{1}{4} a b \frac{\lambda \mu \nu}{l m n}, \tag{6}$$

si ha una relazione fra i lati del triangolo inscritto ed i semidiametri rispettivamente paralleli. Analogamente, dalla equazione (1) si ha:

$$\begin{vmatrix} \frac{x_1 - x_2}{a} & \frac{y_1 - y_2}{b} & \frac{z_1 - z_2}{c} \\ \frac{x_2 - x_3}{a} & \frac{y_2 - y_3}{b} & \frac{z_2 - z_3}{c} \\ \frac{x_3 - x_4}{a} & \frac{y_3 - y_4}{b} & \frac{z_3 - z_4}{c} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & \frac{x_1}{a} & \frac{y_1}{b} & \frac{z_1}{c} \\ 1 & \frac{x_2}{a} & \frac{y_2}{b} & \frac{z_2}{c} \\ 1 & \frac{x_3}{a} & \frac{y_3}{b} & \frac{z_3}{c} \\ 1 & \frac{x_4}{a} & \frac{y_4}{b} & \frac{z_4}{c} \end{vmatrix} = \pm \frac{6V}{abc},$$

indicando con V il volume della piramide inscritta nell'ellissoide di cui i semiassi sono a, b, c. Quadrando quest'ultima equazione si ha:

$$\frac{36 V^2}{a^2 b^2 c^2} = \begin{vmatrix} \frac{\lambda^2}{l^2} & A & B \\ A & \frac{\nu^2}{n^2} & C \\ B & C & \frac{\lambda_1^2}{l_1^2} \end{vmatrix},$$

avendo posto per brevità:

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu^2}{m^2} - \frac{\lambda^2}{l^2} - \frac{\nu^2}{n^2}\right),$$

$$B = \frac{1}{2}\left(\frac{\nu^2}{n^2} + \frac{\nu_1^2}{n_1^2} - \frac{\mu^2}{m^2} - \frac{\mu_1^2}{m_1^2}\right),$$

$$C = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1^2}{m_1^2} - \frac{\lambda_1^2}{l_1^2} - \frac{\nu^2}{n^2}\right);$$

ossia

$$V = \frac{abc}{12}\sqrt{\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{\lambda^2}{l^2}+\frac{\lambda_1^2}{l_1^2}\right)\left(\frac{\mu^2\mu_1^2}{m^2m_1^2}+\frac{\nu^2\nu_1^2}{n^2n_1^2}-\frac{\lambda^2\lambda_1^2}{l^2l_1^2}-\frac{\mu_1^2\nu_1^2}{m_1^2n_1^2}\right)\\ +\left(\frac{\mu^2}{m^2}+\frac{\mu_1^2}{m_1^2}\right)\left(\frac{\lambda^2\lambda_1^2}{l^2l_1^2}+\frac{\nu^2\nu_1^2}{n^2n_1^2}-\frac{\mu^2\mu_1^2}{m^2m_1^2}-\frac{\lambda_1^2\nu_1^2}{l_1^2n_1^2}\right)\\ +\left(\frac{\nu^2}{n^2}+\frac{\nu_1^2}{n_1^2}\right)\left(\frac{\lambda^2\lambda_1^2}{l^2l_1^2}+\frac{\mu^2\mu_1^2}{m^2m_1^2}-\frac{\nu^2\nu_1^2}{n^2n_1^2}-\frac{\mu_1^2\lambda_1^2}{m_1^2l_1^2}\right)\\ -\frac{\lambda^2\mu^2\nu^2}{l^2m^2n^2}+3\frac{\lambda_1^2\mu_1^2\nu_1^2}{l_1^2m_1^2n_1^2} \end{array}\right\}}.$$

Le λ, μ, ν; λ_1, μ_1, ν_1, come vedesi facilmente, sono gli spigoli della piramide, e le l, m, n; l_1, m_1, n_1 i semidiametri paralleli.

La espressione trovata dal sig. JOACHIMSTHAL pel volume della piramide inscritta nell'ellissoide è più simmetrica della superiore, ed ha la stessa forma di quella trovata più sopra per l'area del triangolo inscritto nell'ellisse. Questa espressione è la seguente:

$$V = \frac{abc}{24}\sqrt{\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{\lambda\lambda_1}{ll_1}+\frac{\mu\mu_1}{mm_1}+\frac{\nu\nu_1}{nn_1}\right)\left(\frac{\lambda\lambda_1}{ll_1}+\frac{\mu\mu_1}{mm_1}-\frac{\nu\nu_1}{nn_1}\right)\\ \left(\frac{\lambda\lambda_1}{ll_1}-\frac{\mu\mu_1}{mm_1}+\frac{\nu\nu_1}{nn_1}\right)\left(-\frac{\lambda\lambda_1}{ll_1}+\frac{\mu\mu_1}{mm_1}+\frac{\nu\nu_1}{nn_1}\right) \end{array}\right\}},$$

la quale insieme alla superiore dà una relazione fra gli spigoli della piramide ed i semidiametri paralleli. Se nel caso del triangolo poniamo per brevità:

$$a = \frac{\lambda}{l}, \quad b = \frac{\mu}{m}, \quad c = \frac{\nu}{n},$$

e nel caso della piramide:

$$a = \frac{\lambda\lambda_1}{ll_1}, \quad b = \frac{\mu\mu_1}{mm_1}, \quad c = \frac{\nu\nu_1}{nn_1},$$

le quantità sotto il segno radicale nelle espressioni dell'area e del volume di quel triangolo e di quella piramide saranno rappresentabili col determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Date le equazioni delle rette lati di un triangolo determinare l'area del medesimo? Sieno

$$(7) \qquad \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3 = 0, \end{array}$$

le equazioni dei lati; e si denotino con α_3, β_3; α_2, β_2; α_1, β_1, le coordinate dei punti di intersezione dei lati primo e secondo, primo e terzo, secondo e terzo. Chiamo A l'area del triangolo; si avrà:

$$A = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 1 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 1 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix};$$

e posto per brevità:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

dalle equazioni (7) si hanno le seguenti:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial c_1} \alpha_1 = \frac{\partial \Delta}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial c_1} \beta_1 = \frac{\partial \Delta}{\partial b_1}, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial c_2} \alpha_2 = \frac{\partial \Delta}{\partial a_2}, \; \ldots;$$

quindi sarà

$$A = \pm \frac{1}{2} \frac{1}{\dfrac{\partial \Delta}{\partial c_1} \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_2} \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_3}} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Delta}{\partial a_1} & \dfrac{\partial \Delta}{\partial b_1} & \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_1} \\ \dfrac{\partial \Delta}{\partial a_2} & \dfrac{\partial \Delta}{\partial b_2} & \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_2} \\ \dfrac{\partial \Delta}{\partial a_3} & \dfrac{\partial \Delta}{\partial b_3} & \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_3} \end{vmatrix};$$

e siccome quest'ultimo determinante è il determinante ad elementi reciproci degli elementi del determinante Δ, quindi sarà, come è noto, eguale a Δ^2, e si avrà:

$$A = \pm \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{\dfrac{\partial \Delta}{\partial c_1} \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_2} \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_3}}.$$

Se d_1, d_2, d_3, d_4 indicassero i parametri analoghi nelle equazioni dei quattro piani, faccie di un tetraedro, il volume di esso sarebbe

$$V = \pm \frac{1}{6} \frac{\Delta^3}{\dfrac{\partial \Delta}{\partial d_1} \dfrac{\partial \Delta}{\partial d_2} \dfrac{\partial \Delta}{\partial d_3} \dfrac{\partial \Delta}{\partial d_4}},$$

essendo

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

Mediante queste formole si possono determinare l'area del triangolo circoscritto ad

una ellisse ed il volume del tetraedro circoscritto ad un'elissoide, allorquando si conoscano le coordinate dei punti di contatto. Sieno:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

la equazione dell'ellisse; x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 le coordinate dei punti di contatto. Le equazioni dei lati saranno:

$$\frac{x_1}{a^2} x + \frac{y_1}{b^2} y - 1 = 0,$$

$$\frac{x_2}{a^2} x + \frac{y_2}{b^2} y - 1 = 0,$$

$$\frac{x_3}{a^2} x + \frac{y_3}{b^2} y - 1 = 0;$$

quindi, indicando con H l'area del triangolo inscritto avente i vertici in quei tre punti, e con α, β, γ le aree dei triangoli aventi ciascuno un vertice al centro e per base uno dei lati del triangolo inscritto, si avrà:

$$A = \frac{a^2 b^2 H^2}{4 \alpha\beta\gamma}.$$

Notiamo che, indicando con λ, μ, ν i lati del triangolo inscritto e con l, m, n i semidiametri paralleli, si hanno:

$$\alpha = \frac{ab}{2} \frac{\lambda}{l} \sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{\lambda^2}{l^2}},$$

$$\beta = \frac{ab}{2} \frac{\mu}{m} \sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{\mu^2}{m^2}},$$

$$\gamma = \frac{ab}{2} \frac{\nu}{n} \sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{\nu^2}{n^2}};$$

e quindi sostituendo:

$$A = \frac{ab}{8} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\lambda^2}{l^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\mu^2}{m^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\nu^2}{n^2}\right)}} \frac{\lambda\mu\nu}{lmn}.$$

Ora, se con α_1, β_1; α_2, β_2; α_3, β_3; λ_1, μ_1, ν_1; l_1, m_1, n_1, si denotano le coordinate dei vertici degli angoli del triangolo circoscritto, le lunghezze dei lati del medesimo, ed i semidiametri paralleli ai lati stessi, si hanno:

$$\alpha_1 = \frac{a^2 (y_2 - y_3)}{2\alpha}, \quad \beta_1 = \frac{b^2 (x_3 - x_2)}{2\alpha}, \quad \alpha_2 = \frac{a^2 (y_3 - y_1)}{2\beta}, \text{ ecc.}$$

$$\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{a^2} + \frac{(\beta_1 - \beta_2)^2}{b^2} = \frac{\nu_1^2}{n_1^2}, \text{ ecc.},$$

per cui sostituendo si otterranno le

$$\frac{\lambda_1}{l_1} = \frac{a b H}{2 \beta \gamma}, \qquad \frac{\mu_1}{m_1} = \frac{a c H}{2 \alpha \gamma}, \qquad \frac{\nu_1}{n_1} = \frac{a b H}{2 \alpha \beta}.$$

Per queste ultime ha luogo la

$$\frac{\lambda_1^2 \mu_1^2 \nu_1^2}{l_1^2 m_1^2 n_1^2} = \frac{A^4}{\alpha^2 \beta^2 \gamma^2} = \frac{4 A^4}{a^2 b^2 H^2};$$

e quindi osservata l'equazione (6) si hanno le

$$A^2 = \frac{a^2 b^2}{8} \frac{\lambda \mu \nu \lambda_1 \mu_1 \nu_1}{l m n l_1 m_1 n_1}, \qquad H^2 \frac{\lambda_1 \mu_1 \nu_1}{l_1 m_1 n_1} = \frac{1}{2} A \frac{\lambda \mu \nu}{l m n}.$$

Se con p, q, r si indicano le lunghezze delle perpendicolari condotte dal centro ai lati del triangolo circoscritto, si avranno, come è noto,

$$l_1 p = m_1 q = n_1 r = a b,$$

e quindi

$$p \lambda_1 : q \mu_1 : r \nu_1 = \alpha : \beta : \gamma.$$

Considerando l'ellissoide rappresentata dall'equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{8}$$

se si chiamano $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots$ le coordinate dei quattro punti di contatto di essa colle faccie di un tetraedro circoscritto, V il volume di questo, U il volume del tetraedro inscritto, α, β, γ, δ i volumi dei tetraedri aventi il vertice nel centro dell'ellissoide e per basi le faccie dell'inscritto, si ha:

$$V = \frac{a^2 b^2 c^2}{36} \frac{U^3}{\alpha \beta \gamma \delta}. \tag{9}$$

Indicando con A, B, C, D le aree delle faccie di un tetraedro si hanno facilmente le espressioni:

$$A = \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{\frac{\partial \Delta}{\partial d_2} \frac{\partial \Delta}{\partial d_3} \frac{\partial \Delta}{\partial d_4}} \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2},$$

$$B = \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{\frac{\partial \Delta}{\partial d_1} \frac{\partial \Delta}{\partial d_2} \frac{\partial \Delta}{\partial d_4}} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2},$$

. . . .

Se il tetraedro è il circoscritto all'ellissoide, saranno:

$$A = \frac{a^2 b^2 c^2}{12} \frac{U^2}{\beta\gamma\delta} \sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^4}},$$

$$B = \frac{a^2 b^2 c^2}{12} \frac{U^2}{\alpha\gamma\delta} \sqrt{\frac{x_2^2}{a^4} + \frac{y_2^2}{b^4} + \frac{z_2^2}{c^4}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ;$$

ossia, indicando con p_1, p_2, p_3, p_4 le lunghezze delle perpendicolari condotte dal centro dell'ellissoide alle faccie del tetraedro circoscritto, si hanno le

$$p_1 A : p_2 B : p_3 C : p_4 D = \alpha : \beta : \gamma : \delta.$$

Indicando con α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2; ... le coordinate dei vertici degli angoli del tetraedro circoscritto, dalle equazioni delle faccie si hanno i valori:

$$\alpha_1 \frac{\partial \Delta}{\partial r_1} = a^2 \frac{\partial \Delta}{\partial x_1}, \quad \beta_1 \frac{\partial \Delta}{\partial r_1} = b^2 \frac{\partial \Delta}{\partial y_1}, \quad \gamma_1 \frac{\partial \Delta}{\partial r_1} = c^2 \frac{\partial \Delta}{\partial z_1}, \quad \ldots,$$

essendo posto per brevità

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & r_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & r_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & r_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & r_4 \end{vmatrix}.$$

Notiamo che in questa espressione si ha

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1,$$

per cui risulteranno:

$$\Delta = \pm 6U, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial r_1} = \pm 6\delta, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial r_2} = \pm 6\gamma, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial r_3} = \pm 6\beta, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial r_4} = \pm 6\alpha.$$

I valori superiori dànno:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \pm \frac{a^2}{36 \cdot \gamma\delta} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial x_2} \frac{\partial \Delta}{\partial r_1} - \frac{\partial \Delta}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta}{\partial r_2} \right),$$

o, come è noto dalla teorica dei determinanti,

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \pm \frac{a^2}{36 \cdot \gamma\delta} \Delta \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x_2 \, \partial r_1} = \pm \frac{a^2}{6} \frac{U}{\gamma\delta} (y_4 z_3 - y_3 z_4).$$

Indicando con λ_1, λ_2; μ_1, μ_2; ν_1, ν_2 gli spigoli del tetraedro circoscritto; con λ', λ''; μ', μ''; ν', ν'' quelli dell'inscritto; l_1, l_2; m_1, m_2; n_1, n_2; l', l''; m', m''; n', n'' i

semidiametri dell'ellissoide rispettivamente paralleli a quegli spigoli, si avrà:

$$\frac{(\alpha_1-\alpha_2)^2}{a^2}+\frac{(\beta_1-\beta_2)^2}{b^2}+\frac{(\gamma_1-\gamma_2)^2}{c^2}=\frac{\lambda_1^2}{l_1^2},$$

e quindi

$$\frac{\lambda_1^2}{l_1^2}=\frac{U^2}{36\,.\,\gamma^2\delta^2}[a^2(y_4z_3-y_3z_4)^2+b^2(z_4x_3-z_3x_4)^2+c^2(x_4y_3-x_3y_4)^2],$$

dalla quale sviluppando ed osservando che le x_3, y_3, z_3; x_4, y_4, z_4 soddisfano all'equazione (8) si ha:

$$\frac{\lambda_1^2}{l_1^2}=\frac{a^2b^2c^2}{36}\frac{U^2}{\gamma^2\delta^2}\frac{\lambda''^2}{l''^2}\left(1-\frac{1}{4}\frac{\lambda''^2}{l''^2}\right).$$

In questo modo si ottengono le seguenti sei equazioni:

$$\frac{\lambda_1}{l_1}=\frac{abc}{6}\frac{U}{\gamma\delta}\frac{\lambda''}{l''}L_2,\qquad \frac{\lambda_2}{l_2}=\frac{abc}{6}\frac{U}{\alpha\beta}\frac{\lambda'}{l'}L_1,$$

$$\frac{\mu_1}{m_1}=\frac{abc}{6}\frac{U}{\beta\delta}\frac{\mu''}{m''}M_2,\qquad \frac{\mu_2}{m_2}=\frac{abc}{6}\frac{U}{\alpha\gamma}\frac{\mu'}{m'}M_1,$$

$$\frac{\nu_1}{n_1}=\frac{abc}{6}\frac{U}{\beta\gamma}\frac{\nu''}{n''}N_2,\qquad \frac{\nu_2}{n_2}=\frac{abc}{6}\frac{U}{\alpha\delta}\frac{\nu'}{n'}N_1,$$

nelle quali le L_2, M_2, ... sono poste per brevità in luogo dei radicali. Da queste equazioni, osservando alla (9), si ottiene la

$$U^3\frac{\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2}{l_1l_2m_1m_2n_1n_2}=V^3\frac{\lambda'\lambda''\mu'\mu''\nu'\nu''}{l'l''m'm''n'n''}L_1L_2M_1M_2N_1N_2.$$

PARTE SECONDA.

Considerando i primi sei elementi della formola (1), e ponendo

$$\alpha_1=\frac{1}{m_1-a_1},\quad \alpha_2=\frac{1}{m_2-a_2},\quad \beta_1=\frac{1}{m_1-b_1},\ \ldots,$$

si ha

$$\frac{1}{M_1M_2}\begin{vmatrix}(m_1-c_1)(a_1-b_1) & (m_2-c_2)(a_2-b_2)\\ (m_1-a_1)(b_1-c_1) & (m_2-a_2)(b_2-c_2)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{m_1-a_1} & \frac{1}{m_2-a_2}\\ 1 & \frac{1}{m_1-b_1} & \frac{1}{m_2-b_2}\\ 1 & \frac{1}{m_1-c_1} & \frac{1}{m_2-c_2}\end{vmatrix},$$

essendo
$$M_1 = (m_1 - a_1)(m_1 - b_1)(m_1 - c_1)\,,$$
$$M_2 = (m_2 - a_2)(m_2 - b_2)(m_2 - c_2)\,.$$

Ora, se a_1, b_1, c_1, m_1 si ritengono essere le distanze di quattro punti situati sopra una medesima retta L_1 da un punto di essa, ed analogamente a_2, b_2, c_2, m_2 per un'altra retta L_2, il determinante del primo membro eguagliato a zero dà luogo all'equazione:

$$\frac{(m_1 - c_1)(a_1 - b_1)}{(m_1 - a_1)(b_1 - c_1)} = \frac{(m_2 - c_2)(a_2 - b_2)}{(m_2 - a_2)(b_2 - c_2)},$$

la quale esprime la eguaglianza dei rapporti anarmonici di quei due sistemi di quattro punti; ossia esprime essere le rette L_1, L_2 divise omograficamente.

Se i punti di cui le distanze sono m_1, m_2 si suppongono coincidere, e si assume questo punto quale origine di assi coordinati, e le due rette L_1, L_2 quali assi delle x e delle y, la equazione superiore darà:

$$\begin{vmatrix} c_1(a_1 - b_1) & c_2(a_2 - b_2) \\ a_1(b_1 - c_1) & a_2(b_2 - c_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} \\ 1 & \frac{1}{b_1} & \frac{1}{b_2} \\ 1 & \frac{1}{c_1} & \frac{1}{c_2} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Sussistendo questa equazione le due rette saranno ancora divise omograficamente, e queste ultime equazioni considerate a parte dimostrano due proprietà che si verificano in questo caso:

1° « che i punti di intersezione delle rette le quali uniscono a due a due i punti « di divisione corrispondenti ma non omologhi delle rette L_1, L_2 sono situati in una « medesima retta passante per l'origine » (Chasles, *Géométrie supérieure,* p. 73).

2° « che le rette le quali uniscono a due a due i punti omologhi di divisione si « incontrano in un medesimo punto » (Chasles, *Géométrie supérieure,* p. 70).

La equazione:

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{m_1 - a_1} & \frac{1}{m_2 - a_2} \\ 1 & \frac{1}{m_1 - b_1} & \frac{1}{m_2 - b_2} \\ 1 & \frac{1}{m_1 - c_1} & \frac{1}{m_2 - c_2} \end{vmatrix} = 0,$$

rappresentando la eguaglianza dei rapporti anarmonici di due sistemi di quattro punti, conterrà come caso particolare l'involuzione di sei punti (Chasles, *Géométrie supérieure,*

p. 128). Basterà a quest'uopo far coincidere opportunamente due punti della retta L_1 con due punti della retta L_2. Quindi la involuzione di sei punti verrà rappresentata dalle seguenti equazioni:

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1}{a_2 - a_1} & \dfrac{1}{a_1 - a_2} \\ 1 & \dfrac{1}{a_2 - b_1} & \dfrac{1}{a_1 - b_2} \\ 1 & \dfrac{1}{a_2 - c_1} & \dfrac{1}{a_1 - c_2} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ecc.}$$

Al § 4 del Cap. XX della *Géométrie supérieure* il sig. Chasles dimostra che: « quando « due lati di un esagono sono divisi omograficamente dagli altri quattro, le tre diago- « nali che uniscono i vertici opposti passano per un medesimo punto, e reciprocamente ». Questo teorema vedesi facilmente essere un corollario della prima proposizione dimostrata qui sopra; quale corollario della seconda proposizione abbiamo il seguente teorema:

« Si immagini l'esagono $ABCDEF$ e si chiami: O il punto d'incontro di due « lati opposti AB, DE; R il punto d'incontro della diagonale CF e del lato AB; ed « S il punto d'incontro di quella diagonale e del lato ED. Allorquando i due sistemi « di quattro punti O, R, A, B; O, S, D, E, che si corrispondono rispettivamente, « avranno i loro rapporti anarmonici eguali, le tre diagonali che uniscono i vertici op- « posti si incontreranno in un medesimo punto ». Anche la proposizione dimostrata dal sig. Chasles (l. c., pag. 304): « quando in un esagono $ABCDEF$ i raggi condotti « dai due vertici B, E agli altri quattro formano due fasci omografici, i punti di con- « corso dei lati opposti sono in una medesima retta », è un corollario della prima di quelle proposizioni, potendosi sostituire all'omografia dei fasci, la omografia dei punti di intersezione delle rette AC, FD colle rette componenti i fasci medesimi.

Dimostrasi poi facilmente che in questo caso l'esagono è inscritto in una linea del secondo ordine. Infatti, assumendo le rette AC, FD come assi delle y e delle x, ed il loro punto di concorso come origine delle cordinate; indicando con a, c le ordinate dei punti A, C pei quali l'ascissa è nulla, e con f, d le ascisse dei punti F, D; inoltre con m, n le ordinate dei punti, in cui i lati ED, EF dell'esagono incontrano l'asse delle y, e con s, r le ascisse dei punti, in cui i lati BA, BC incontrano l'asse delle x; e finalmente con x_1, y_1; x_2, y_2 le coordinate dei punti B, E; la eguaglianza dei rapporti anarmonici risultanti dai due sistemi di quattro punti di intersezione darà:

$$\begin{vmatrix} (r-f)(d-s) & (m-a)(c-n) \\ (r-s)(d-f) & (m-n)(c-a) \end{vmatrix} = 0.$$

Ma è evidente essere

$$r = \frac{c x_1}{c - y_1}, \quad s = \frac{a x_1}{a - y_1}; \qquad m = \frac{d y_2}{d - x_2}, \quad n = \frac{f y_2}{f - x_2};$$

quindi sostituendo e riducendo:

$$\begin{vmatrix} c x_1 + f y_1 - c f & a x_2 + d y_2 - a d \\ x_1 y_1 (c f - c x_2 - f y_2) & x_2 y_2 (a d - a x_1 - d y_1) \end{vmatrix} = 0.$$

Ora, se supponiamo che le x_1, y_1 rappresentino coordinate di un punto qualunque di una linea, quest'ultima equazione sarebbe quella di una linea del secondo ordine, e siccome la equazione stessa è soddisfatta, ne viene che il punto di coordinate x_1, y_1, ossia il punto B, è situato sopra questa linea. Inoltre quella equazione è soddisfatta allorquando facciasi

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2; \quad x_1 = 0, \quad y_1 = a;$$

$$x_1 = 0, \quad y_1 = c; \quad x_1 = f, \quad y_1 = 0; \quad x_1 = d, \quad y_1 = 0,$$

quindi i punti E, A, C, F, D saranno pure situati su quella linea, cioè l'esagono sarà inscritto in una conica. È questo il teorema di Pascal; da esso deducesi, come è noto, quello di Brianchon, che in ogni esagono circoscritto ad una conica le diagonali si intersecano in un medesimo punto.

« Allorquando due esagoni sono l'uno inscritto, l'altro circoscritto, ad una mede- « sima conica a centro, in modo che i vertici degli angoli dell'inscritto sieno i punti « di contatto pel secondo; se le diagonali del primo si segheranno in un medesimo « punto, i lati opposti del secondo si segheranno in punti situati sopra una medesima « retta ». Sieno x_1, y_1; x_2, y_2; ... le coordinate dei vertici dell'esagono inscritto; la condizione che le diagonali si seghino in uno stesso punto verrà espressa dalla equazione:

$$\begin{vmatrix} x_1 y_4 - x_4 y_1 & y_1 - y_4 & x_4 - x_1 \\ x_2 y_5 - x_5 y_2 & y_2 - y_5 & x_5 - x_2 \\ x_3 y_6 - x_6 y_3 & y_3 - y_6 & x_6 - x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ora, indicando con

$$m x^2 \pm n y^2 = h$$

la equazione di una conica a centro, sarà

$$m x x_r \pm n y y_r = h$$

la equazione della tangente ad essa al punto di coordinate x_r, y_r; e se α_1, β_1; α_2, β_2; α_3, β_3 dinotano le coordinate dei punti di intersezione dei lati opposti dell'esagono

circoscritto, si hanno:

$$\alpha_1 = \frac{b}{m}\,\frac{y_1 - y_4}{x_1 y_4 - x_4 y_1}, \quad \beta_1 = \pm \frac{b}{n}\,\frac{x_4 - x_1}{x_1 y_4 - x_4 y_1}, \quad \text{ecc.};$$

quindi l'equazione superiore trasformasi nella

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 1 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 1 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0,$$

la quale appunto dimostra il teorema enunciato *).

Se si indicano con m_1, a_1, b_1, c_1; m_2, a_2, b_2, c_2 le rette costituenti due fasci, e nella equazione (1) si fanno

$$\alpha_1 = \cot m_1 a_1, \quad \beta_1 = \cot m_1 b_1, \quad \gamma_1 = \cot m_1 c_1,$$

$$\alpha_2 = \cot m_2 a_2, \quad \beta_2 = \cot m_2 b_2, \quad \gamma_2 = \cot m_2 c_2,$$

si ha:

$$\begin{vmatrix} \cot m_1 a_1 - \cot m_1 b_1 & \cot m_2 a_2 - \cot m_2 b_2 \\ \cot m_1 b_1 - \cot m_1 c_1 & \cot m_2 b_2 - \cot m_2 c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cot m_1 a_1 & \cot m_2 a_2 \\ 1 & \cot m_1 b_1 & \cot m_2 b_2 \\ 1 & \cot m_1 c_1 & \cot m_2 c_2 \end{vmatrix}.$$

Queste espressioni eguagliate a zero dànno luogo a due equazioni, la prima delle quali contiene la eguaglianza dei rapporti anarmonici di quei due fasci di rette (CHASLES, *Géométrie supérieure*, p. 27). La seconda di esse, supponendo che le rette m_1, m_2 coincidano senza che ciò abbia luogo pei centri dei due fasci, dimostra che le altre rette di un fascio incontrano le omologhe dell'altro fascio in linea retta (CHASLES, l. c., pag. 71). Ciò vedesi facilmente osservando che, chiamata r la distanza fra i due centri, ed x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 le coordinate di quei tre punti di intersezione, si hanno le

$$\cot m_1 a_1 = \frac{x_1 - r}{y_1}, \qquad \cot m_1 a_2 = \frac{x_1}{y_1}, \quad \ldots,$$

per cui quella seconda equazione diventa:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0,$$

cioè quei tre punti sono in linea retta.

Ciascuna delle suddette equazioni potrà rappresentare la involuzione di due fasci di quattro rette, allorquando si facciano coincidere opportunamente due rette di un fascio

*) *Vedi* in fine la « Nota ».

con due rette dell'altro. Quindi la involuzione potrà esprimersi con una delle equazioni:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cot a_2 a_1 & \cot a_1 a_2 \\ 1 & \cot a_2 b_1 & \cot a_1 b_2 \\ 1 & \cot a_2 c_1 & \cot a_1 c_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ecc.}$$

Se si immagina una retta che seghi quelle sei rette a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 e si indicano con α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2 i sei punti di intersezione, con O il punto di concorso delle sei rette, e con m, n gli angoli che quella trasversale fa colle rette a_1, a_2, si hanno le equazioni:

$$\cot a_2 a_1 = \frac{O\alpha_2}{\alpha_2\alpha_1}\frac{1}{\operatorname{sen} n} - \cot n, \qquad \cot a_1 a_2 = \frac{O\alpha_1}{\alpha_1\alpha_2}\frac{1}{\operatorname{sen} m} - \cot m,$$

$$\cot a_2 b_1 = \frac{O\alpha_2}{\alpha_2\beta_1}\frac{1}{\operatorname{sen} n} - \cot n, \qquad \cot a_1 b_2 = \frac{O\alpha_1}{\alpha_1\beta_2}\frac{1}{\operatorname{sen} m} - \cot m,$$

$$\cot a_2 c_1 = \frac{O\alpha_2}{\alpha_2\gamma_1}\frac{1}{\operatorname{sen} n} - \cot n, \qquad \cot a_1 c_2 = \frac{O\alpha_1}{\alpha_1\gamma_2}\frac{1}{\operatorname{sen} m} - \cot m,$$

e quindi sostituendo e riducendo:

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha_2\alpha_1} & \frac{1}{\alpha_1\alpha_2} \\ 1 & \frac{1}{\alpha_2\beta_1} & \frac{1}{\alpha_1\beta_2} \\ 1 & \frac{1}{\alpha_2\gamma_1} & \frac{1}{\alpha_1\gamma_2} \end{vmatrix} = 0,$$

la quale osservando la (10) si vede facilmente esprimere la involuzione di quei sei punti di intersezione (CHASLES, l. c., pag. 172).

NOTA.

L'ultima proposizione può generalizzarsi mediante il seguente teorema:

« Se le prime polari di una linea dell'ennesimo ordine, rispetto a tre punti dati, « si intersecano in un medesimo punto, i tre punti poli corrispondenti sono in una « medesima retta ».

Sia $\varphi = 0$ l'equazione della linea; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 le coordinate

di tre punti poli; saranno

$$x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + z_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

$$x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + z_2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

$$x_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y_3 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + z_3 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

le equazioni delle tre polari. Se queste linee del grado $n - 1$ si intersecano in uno stesso punto, si ha :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

cioè, ecc.

Nello stesso modo si può dimostrare il teorema più generale:

« Se le polari dell'ordine $n - r$ di una linea dell'ennesimo ordine, rispetto ad « $\frac{1}{2}(r+1)(r+2)$ punti dati, si intersecano in un medesimo punto, gli $\frac{1}{2}(r+1)(r+2)$ « poli corrispondenti sono in una linea dell'erresimo ordine ».

Corollario. — « Se sei rette polari di una linea del terzo ordine si segano in « uno stesso punto, i sei poli corrispondenti sono situati in una conica ».

Un teorema analogo ha luogo per le superficie.

Questa proposizione è anche un caso particolare del teorema seguente dato dalla teorica delle polari reciproche:

« Se la corda di contatto delle tangenti condotte da un punto dato ad una conica « si muove conservandosi tangente ad una linea dell'ennesima classe o dell'$n(n-1)^{\circ}$ « ordine, il punto descrive una linea dell'ennesimo ordine ».

Se la linea alla quale conservasi tangente la corda di contatto sarà del secondo ordine, il punto descriverà una linea del secondo ordine (Giorgini, Poncelet).

Teoremi analoghi hanno luogo per le superficie del secondo ordine, ed i piani delle linee di contatto delle coniche circoscritte.

[G., Pi.].

XVI.

SOPRA UN TEOREMA NELLA TEORICA DELLE FORME QUADRATICHE.

Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, tomo V (1854), pp. [illegible].

Una forma quadratica si chiama *trasformata in sè stessa*, quando mediante una sostituzione lineare la si trasformi in un'altra, i coefficienti della quale sono ordinatamente identici ai coefficienti della prima.

Sia

$$(1)\qquad f = \sum_r \sum_s A_{r,s}\, x_r x_s$$

una forma quadratica ad n indeterminate, e sia

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{1,1} y_1 + c_{1,2} y_2 + \ldots + c_{1,n} y_n \\ x_2 &= c_{2,1} y_1 + c_{2,2} y_2 + \ldots + c_{2,n} y_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= c_{n,1} y_1 + c_{n,2} y_2 + \ldots + c_{n,n} y_n \end{aligned}$$

una sostituzione lineare la quale riduce questa forma alla

$$f = \sum_r \sum_s A_{r,s}\, y_r y_s\,.$$

I coefficienti della sostituzione lineare saranno dati dalle formole seguenti. Sieno $a_{r,s}$ delle quantità, $\frac{1}{2}\, n(n-1)$ in numero, tali che

$$a_{r,r} = 0\,, \qquad a_{r,s} + a_{s,r} = 0\,,$$

e poniamo

$$\sum_r a_{r,s} A_{r,t} = k_{s,t} \qquad \sum_m a_{r,m} A_{r,m} = k_{r,r} - 1 .$$

Indicando con Δ il determinante

$$\sum (\pm k_{1,1} k_{2,2} k_{3,3} \ldots k_{n,n})$$

e con

$$\nabla = \sum (\pm h_{1,1} h_{2,2} h_{3,3} \ldots h_{n,n}) = \Delta^{n-1}$$

il determinante ad elementi reciproci del determinante Δ, si avranno le

$$\Delta c_{r,1} = 2 h_{1,r} , \quad \Delta c_{r,2} = 2 h_{2,r} , \quad \ldots \quad \Delta c_{r,r} = 2 h_{r,r} - \Delta , \quad \ldots \quad \Delta c_{r,n} = 2 h_{n,r} .$$

Questi valori si ottengono applicando il metodo indicato recentemente dal sig. HERMITE per la trasformazione delle funzioni quadratiche in sè stesse *).

LEMMA I. — *Il determinante*

$$H = \begin{vmatrix} k_{1,1} - 1 & k_{1,2} & \ldots & k_{1,n} \\ k_{2,1} & k_{2,2} - 1 & \ldots & k_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{n,1} & k_{n,2} & \ldots & k_{n,n} - 1 \end{vmatrix}$$

risulta evidentemente dal prodotto dei due determinanti

$$Q = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \ldots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \ldots & A_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \ldots & A_{n,n} \end{vmatrix} , \qquad R = \begin{vmatrix} 0 & d_{1,2} & \ldots & d_{1,n} \\ d_{2,1} & 0 & \ldots & d_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{n,1} & d_{n,2} & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

e quindi sarà nullo per n dispari.

LEMMA II. — *Rappresentando con ${}^{(i)}H_{r,s}$ un determinante minore dell'ordine i del determinante H, si ha*

$${}^{(i)}H_{r,s} = {}^{(i)}Q_{r,1}\, {}^{(i)}R_{1,s} + {}^{(i)}Q_{r,2}\, {}^{(i)}R_{2,s} + \ldots + {}^{(i)}Q_{r,u}\, {}^{(i)}R_{u,s} ,$$

essendo

$$u = \frac{n(n-1) \ldots (n-i+1)}{1 \cdot 2 \ldots i} .$$

Se ne deduce:

$$\sum_r {}^{(i)}H_{r,r} = \sum_r ({}^{(i)}Q_{r,1}\, {}^{(i)}R_{r,1} + {}^{(i)}Q_{r,2}\, {}^{(i)}R_{r,2} + \ldots + {}^{(i)}Q_{r,u}\, {}^{(i)}R_{r,u}) .$$

Ma Q essendo determinante simmetrico si ha:

$${}^{(i)}Q_{r,s} = {}^{(i)}Q_{s,r} ,$$

*) Cambridge and Dublin Mathematical Journal, vol. IX (1854), p. 63.

ed R essendo determinante gobbo simmetrico si ha:

per $n - i$ dispari, $\qquad {}^{(i)}R_{r,s} = - {}^{(i)}R_{s,r}$,

per $n - i$ pari, $\qquad {}^{(i)}R_{r,s} = {}^{(i)}R_{s,r}$;

e quindi, essendo per $n - i$ dispari ${}^{(i)}R_{r,r} = 0$, si avranno le

$$(2)\quad \begin{cases} \text{per } n - i \text{ dispari}, & \sum_r {}^{(i)}H_{r,r} = 0, \\ \text{per } n - i \text{ pari}, & \sum_r {}^{(i)}H_{r,r} = \sum_r \sum_s {}^{(i)}Q_{r,s}\, {}^{(i)}R_{r,s}. \end{cases}$$

TEOREMA. — *La equazione*

$$\begin{vmatrix} c_{1,1} - x & c_{1,2} & \dots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} - x & \dots & c_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \dots & c_{n,n} - x \end{vmatrix} = 0$$

ha, se n è dispari, l'unità per una radice, e le altre due a due reciproche, e se n è pari le sue radici sono due a due reciproche.

Infatti, sostituendo i valori superiori di $c_{1,1}$, $c_{1,2}$, ... si ottiene:

$$\begin{vmatrix} b_{1,1} - y & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} - y & \dots & b_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,n} - y \end{vmatrix} = 0,$$

essendo $y = \frac{1}{2} \Delta (1 + x)$; e moltiplicando il primo membro di quest'ultima equazione per Δ si ha:

$$(3)\quad \begin{vmatrix} k_{1,1} - 1 + z & k_{1,2} & \dots & k_{1,n} \\ k_{2,1} & k_{2,2} - 1 + z & \dots & k_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n,1} & k_{n,2} & \dots & k_{n,n} - 1 + z \end{vmatrix} = 0,$$

essendo $z = \frac{x - 1}{x + 1}$, e quindi $x = \frac{1 + z}{1 - z}$. Sviluppando questa equazione, avendo riguardo alle (2), si ottiene:

per n dispari, $\qquad z^n + z^{n-2} \sum_r {}^{(n-2)}H_{r,r} + \dots + z^3 \sum_r {}^{(3)}H_{r,r} + z \sum_r {}^{(1)}H_{r,r} = 0$,

e per n pari, $\qquad z^n + z^{n-2} \sum_r {}^{(n-2)}H_{r,r} + \dots + z^2 \sum_r {}^{(2)}H_{r,r} + H = 0$,

le quali contengono il teorema enunciato.

Corollario. — Se supponesi $A_{r,r} = 1$, $A_{r,s} = 0$, e quindi la sostituzione lineare sia ortogonale, si ha:

$$\sum_r {}^{(1)}H_{r,r} = \sum_r {}^{(1)}R_{r,r}$$

e le due ultime equazioni diventano:

$$(4)\quad \begin{cases} n \text{ dispari} & z^n + z^{n-2} \sum_r {}^{(n-2)}R_{r,r} + \ldots + z \sum_r {}^{(1)}R_{r,r} = 0, \\ n \text{ pari} & z^n + z^{n-2} \sum_r {}^{(n-2)}R_{r,r} + \ldots + R = 0; \end{cases}$$

e siccome i determinanti gobbi simmetrici d'ordine pari

$${}^{(n-2)}R_{r,r}, \qquad {}^{(n-4)}R_{r,r}, \qquad \ldots$$

sono, come è noto, quadrati, le radici reciproche saranno in questo caso anco immaginarie conjugate.

Per $n = 3$ la prima delle (4) dà luogo alle

$$z = 0, \qquad z^2 + a_{1,2}^2 + a_{1,3}^2 + a_{2,3}^2 = 0;$$

e quindi le radici della

$$\begin{vmatrix} c_{1,1} - x & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} - x & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} - x \end{vmatrix} = 0$$

saranno:

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = \frac{1 + i\alpha}{1 - i\alpha}, \qquad x_3 = \frac{1 - i\alpha}{1 + i\alpha},$$

posto

$$\alpha = \sqrt{a_{1,2}^2 + a_{1,3}^2 + a_{2,3}^2} \quad \text{e} \quad i = \sqrt{-1}.$$

Se facciamo

$$x_2 = a + ib, \qquad x_3 = a - ib, \qquad a \pm ib = r(\cos\theta \pm i \operatorname{sen}\theta),$$

si ha:

$$r = 1, \qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{2\alpha}{1 - \alpha^2},$$

dalla quale

$$\alpha = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta.$$

Si avranno quindi le

$$a_{1,2} = \cos\lambda \,.\, \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta, \qquad a_{1,3} = \cos\mu \,.\, \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta, \qquad a_{2,3} = \cos\nu \,.\, \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta,$$

mediante le quali si ottengono direttamente le note formole per la trasformazione delle coordinate di Eulero, Lexell, Grunert, Rodriguez.

La funzione quadratica f ha alcune interessanti relazioni con un'altra forma quadratica, le quali ci limiteremo per ora ad indicare. Questa seconda forma è la

$$\varphi = \sum_r \sum_s \alpha_{r,s} \, z_r z_s ,$$

nella quale:

$$\alpha_{r,s} = \sum_m \lambda_{r,m} k_{m,s} , \qquad \lambda_{r,s} = \sum_m A_{r,m} k_{m,s} .$$

Ora:

1° posto $x_r + y_r = 2 z_r$ si ha la relazione:

$$\frac{1}{2}\left(y_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial \varphi}{\partial z_2} + \ldots + y_n \frac{\partial \varphi}{\partial z_n}\right) - \sum_r \sum_s A_{r,s} \, y_r y_s = f ;$$

2° le quantità $\lambda_{r,s}$ hanno la proprietà espressa nelle due seguenti equazioni:

$$\lambda_{r,s} + \lambda_{s,r} = 2 A_{r,s} , \qquad \lambda_{r,r} = A_{r,r} ;$$

3° il discriminante della funzione

$$\varphi + \omega f \tag{5}$$

è eguale al prodotto del discriminante della funzione f (determinante Q), per il quadrato del determinante primo membro dell'equazione (3), supponendo in esso $z = \pm \sqrt{1 + \omega}$.

4° le radici dell'equazione (3) forniranno quindi i valori di ω pei quali la forma (5) è decomponibile in due fattori lineari.

Nei casi di $n = 3$, $n = 4$ queste proposizioni conducono ad altrettanti teoremi geometrici come mostreremo in altra occasione. A questa specie di teoremi geometrici appartengono quelli stabiliti dal sig. CAYLEY nella sua interessante memoria sulla trasformazione omografica delle superficie del secondo ordine *).

[G.].

---

*) Philosophical Magazine, t. VI (1853), p. 326, t. VII (1854), p. 2[illegible]

XVII.

SULLA TEORICA DEGLI INVARIANTI.

Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, — [illegible]

Chiamasi *invariante* di una funzione

$$F(x, y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \dots + a_n y^n$$

ogni funzione $\varphi(a_0, a_1, \dots a_n)$ dei coefficienti della stessa, di cui la forma sia tale che, indicando con

$$\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} y + \dots + \alpha_n y^n$$

la funzione $F(\lambda_1 x + \mu_1 y, \lambda_2 x + \mu_2 y)$, si abbia:

$$\varphi(\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_n) = (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1) \varphi(a_0, a_1, \dots a_n).$$

Il sig. CAYLEY ha dimostrato recentemente *) che ogni invariante φ della funzione F deve soddisfare alle due equazioni:

$$(1) \quad \begin{cases} n a_0 \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_1} + (n-1) a_1 \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_2} + (n-2) a_2 \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_3} + \dots + a_{n-1} \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_n} = 0, \\ a_1 \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_0} + 2 a_2 \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_1} + 3 a_3 \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \dots + n a_n \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_{n-1}} = 0, \end{cases}$$

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. XLVII (1854), p. 109. — Vedi anche una memoria del sig. SYLVESTER nel « Cambridge and Dublin Mathematical Journal », vol VII (1852), pp. 52 e 179.

e quindi la ricerca degli invarianti di una funzione è ridotta all'integrazione di queste equazioni alle derivate parziali del primo ordine.

Sieno ora $x_1, x_2, \dots x_n$ le n radici dell'equazione $F(x, 1) = 0$, e vediamo a quali equazioni debba soddisfare l'invariante φ dei coefficienti del primo membro di questa equazione, quando l'invariante medesimo sia espresso in funzione delle radici, vale a dire da quali equazioni debbono essere sostituite in questo caso le due equazioni del sig. CAYLEY. A questo scopo faremo uso della formola:

$$\frac{\partial a_r}{\partial x_s} = -(a_{r-1} + a_{r-2} x_s + a_{r-3} x_s^2 + \dots + a_0 x_s^{r-1}),$$

la quale si ottiene facilmente per note relazioni; e mediante essa trasformando la equazione:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_s} = \frac{\partial \varphi}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_s} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_s} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial x_s},$$

si ottiene:

$$(2)\quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} = -\left[a_0 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + (a_1 + a_0 x_s)\frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \dots + (a_{n-1} + a_{n-2} x_s + \dots + a_0 x_s^{n-1})\frac{\partial \varphi}{\partial a_n}\right];$$

e quindi, per le note relazioni fra le somme delle potenze e le radici, si hanno le

$$\sum_s \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} = -\left[n a_0 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + (n-1) a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \dots + a_{n-1}\frac{\partial \varphi}{\partial a_n}\right],$$

$$\sum_s x_s^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} = s_1 \sum_s a_s \frac{\partial \varphi}{\partial a_s} + 2 a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + 3 a_3 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \dots + n a_n \frac{\partial \varphi}{\partial a_{n-1}},$$

essendo $s_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n$. Questa seconda equazione, supponendo

$$a_0 \frac{\partial \varphi}{\partial a_0} + a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \dots + a_n \frac{\partial \varphi}{\partial a_n} = m\varphi,$$

assume la forma:

$$\sum x_s^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} - m s_1 \varphi = a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_0} + 2 a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + \dots + n a_n \frac{\partial \varphi}{\partial a_{n-1}}.$$

Per conseguenza le due equazioni richieste saranno:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = 0,$$

$$x_1^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + x_2^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \dots + x_n^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} - m s_1 \varphi = 0.$$

Il sig. CAYLEY ha inoltre dimostrato che dalle due equazioni (1) deducesi la

$$n m \varphi - 2\left(a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + 2 a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \dots + n a_n \frac{\partial \varphi}{\partial a_n}\right) = 0;$$

ora siccome per la (2) si ha

$$\sum_i x_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + 2 a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \ldots + n a_n \frac{\partial \varphi}{\partial a_n},$$

si avrà anche

$$x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = \frac{m n}{2} \varphi,$$

cioè supposto che l'invariante φ espresso in funzione dei coefficienti sia del grado m, allorquando venga espresso in funzione delle radici risulterà del grado $\frac{1}{2} m n$. È poi evidente per le equazioni superiori, che ogni funzione simmetrica delle radici della equazione $F(x, 1) = 0$, che sia anche una funzione delle differenze delle radici, ed in ciascun termine della quale tutte le radici entrino uno stesso numero di volte, sarà un invariante della funzione $F(x, y)$.

Così per esempio, indicando con α, β, γ, δ le radici della

$$(3) \qquad a x^4 + 4 b x^3 + 6 c x^2 + 4 d x + e = 0,$$

si ha: 1° l'invariante

$$\frac{1}{a^2} \varphi = (\alpha - \beta)^2 (\gamma - \delta)^2 + (\alpha - \gamma)^2 (\beta - \delta)^2 + (\alpha - \delta)^2 (\beta - \gamma)^2,$$

il quale corrisponde al noto invariante quadratico:

$$\varphi = a e - 4 b d + 3 c^2;$$

2° l'invariante

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^3} \varphi = & (\alpha - \beta)^2 (\gamma - \delta)^2 [(\alpha - \gamma)(\beta - \delta) + (\alpha - \delta)(\beta - \gamma)] \\ & + (\alpha - \gamma)^2 (\beta - \delta)^2 [(\alpha - \beta)(\gamma - \delta) + (\alpha - \delta)(\beta - \gamma)] \\ & + (\alpha - \delta)^2 (\beta - \gamma)^2 [(\alpha - \beta)(\gamma - \delta) + (\alpha - \gamma)(\beta - \delta)], \end{aligned}$$

il quale corrisponde all'invariante cubico:

$$\varphi = a c e + 2 b c d - a d^2 - e b^2 - c^3;$$

3° l'invariante

$$\frac{1}{a^6} \varphi = (\alpha - \beta)^2 (\alpha - \gamma)^2 (\alpha - \delta)^2 (\beta - \gamma)^2 (\beta - \delta)^2 (\gamma - \delta)^2,$$

ultimo termine dell'equazione ai quadrati delle differenze, al quale corrisponde, come è noto, il discriminante:

$$(a e - 4 b d + 3 c^2)^3 - 27 (a c e + 2 b c d - a d^2 - e b^2 - c^3)^2.$$

Passiamo ora ad accennare una interessante relazione che ha luogo fra le radici

dell'equazione $F(x, 1) = 0$ e forme analoghe agli invarianti della funzione $F(x, y)$. A ciò faremo uso della nuova formola facilmente dimostrabile:

$$\frac{\partial x_s}{\partial a_r} = -\frac{1}{F'(x_s)} x_s^{n-r},$$

nella quale le r, s ponno assumere i valori $1, 2, \ldots n$. Facendo in essa $r = 1, 2, \ldots n$, e moltiplicando le equazioni che ne risultano per $n a_0$, $(n-1) a_1$, $(n-2) a_2$, $\ldots$ a_{n-1}, si ottiene la

$$n a_0 \frac{\partial x_s}{\partial a_1} + (n-1) a_1 \frac{\partial x_s}{\partial a_2} + \ldots + a_{n-1} \frac{\partial x_s}{\partial a_n} + 1 = 0,$$

nella quale ponendo

$$x_s = -\frac{1}{n} \frac{a_1}{a_0} + \varphi,$$

si ha

$$n a_0 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + (n-1) a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \ldots + a_{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial a_n} = 0,$$

e la funzione φ avrà quindi la proprietà che, indicando con α_0, α_1, $\ldots$ α_n i coefficienti della equazione $F(x + h, 1) = 0$, sarà:

$$\varphi(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n) = \varphi(a_0, a_1, \ldots a_n).$$

Mostreremo in altro lavoro come una radice qualunque x_s, e quindi la funzione φ, debbano soddisfare ad un'altra equazione, ed alcune rimarchevoli conseguenze che se ne deducono.

Accenneremo ora una trasformazione per la risolvente Lagrangiana dell'equazione del quarto grado (3), dalla quale rendesi evidente la relazione fra le radici e gli invarianti della medesima. Facendo sparire coi metodi ordinarj il secondo termine della risolvente medesima, si ottiene la

$$\theta^3 - (ae - 4bd + 3c^2)\theta + 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} = 0,$$

nella quale i coefficienti del secondo e terzo termine sono appunto gli invarianti quadratico e cubico della funzione omogenea di quarto grado a due variabili. Facendo uso della risolvente posta sotto questa forma, si ottengono facilmente le espressioni delle radici dell'equazione del quarto grado date senza dimostrazione dal sig. EISENSTEIN nel tomo XXVII (1844), p. 75, del « Journal für die reine und angewandte Mathematik ». Aggiungeremo da ultimo che anche la riduzione alla forma conica della funzione omogenea del quarto grado conduce ad una equazione di questa forma.

[G.].

XVIII.

INTORNO AD ALCUNE PROPRIETÀ DI UNA LINEA TRACCIATA SOPRA UNA SUPERFICIE.

Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, [illegible]

1. Consideriamo una linea qualunque tracciata sopra una superficie, e sieno a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3 i coseni degli angoli che la tangente, la normale ordinaria, la perpendicolare al piano del circolo osculatore, corrispondenti ad un punto di essa, fanno con tre assi ortogonali; ed a, b, c i coseni degli angoli che la normale alla superficie al medesimo punto fa con quegli assi. Indicando con ω l'angolo compreso dalla normale ordinaria della linea e dalla normale alla superficie si hanno le

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} a a_1 + b b_1 + c c_1 &= 0, \\ a a_2 + b b_2 + c c_2 &= \cos\omega, \\ a a_3 + b b_3 + c c_3 &= \operatorname{sen}\omega. \end{aligned}\right.$$

Rappresentiamo con φ', ψ' le derivate degli angoli di contingenza e di torsione della linea. Derivando le equazioni (1) si ottengono le

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} a' a_1 + b' b_1 + c' c_1 &= -\varphi' \cos\omega, \\ a' a_2 + b' b_2 + c' c_2 &= (\psi' - \omega') \operatorname{sen}\omega, \\ a' a_3 + b' b_3 + c' c_3 &= -(\psi' - \omega') \cos\omega; \end{aligned}\right.$$

dalle quali:

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} a' &= -a_1 \varphi' \cos\omega + (a_2 \operatorname{sen}\omega - a_3 \cos\omega)(\psi' - \omega'), \\ b' &= -b_1 \varphi' \cos\omega + (b_2 \operatorname{sen}\omega - b_3 \cos\omega)(\psi' - \omega'), \\ c' &= -c_1 \varphi' \cos\omega + (c_2 \operatorname{sen}\omega - c_3 \cos\omega)(\psi' - \omega'); \end{aligned}\right.$$

ed indicando con ζ' la derivata del complesso delle successive deviazioni delle normali alla superficie lungo la linea che si considera si ha:

$$\zeta'^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2 = \varphi'^2 \cos^2 \omega + (\psi' - \omega')^2. \tag{4}$$

2. Immaginiamo la superficie sviluppabile tangente la superficie lungo quella linea. I coseni degli angoli che la caratteristica di questa superficie sviluppabile fa cogli assi saranno ordinatamente:

$$\frac{1}{\zeta'}(bc' - b'c), \quad \frac{1}{\zeta'}(ca' - c'a), \quad \frac{1}{\zeta'}(ab' - a'b);$$

quindi, chiamando ε l'angolo che questa caratteristica fa colla tangente alla linea, ossia l'angolo compreso dalla medesima tangente e dalla sua tangente conjugata, si ha:

$$\zeta' \cos \varepsilon = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}.$$

Ora per le (1), (2):

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\varphi' \cos \omega \\ 0 & 1 & 0 \\ -\varphi' \cos \omega & 0 & \zeta'^2 \end{vmatrix} = \zeta'^2 - \varphi'^2 \cos^2 \omega;$$

dunque, osservando la (4), si hanno le

$$\zeta' \cos \varepsilon = \pm (\psi' - \omega'), \qquad \zeta' \operatorname{sen} \varepsilon = \pm \varphi' \cos \omega, \tag{5}$$

dalle quali:

$$\tan \varepsilon = \frac{\varphi' \cos \omega}{\psi' - \omega'}. \tag{6}$$

Indicando con δ' la derivata dell'angolo di contingenza dello spigolo di regresso della superficie sviluppabile, si ha, come è noto *),

$$\delta' = \frac{1}{\zeta'^2} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix};$$

ossia, sostituendo per a', b', c' i valori (3) e per a'', b'', c'' le loro derivate,

$$\delta' = \varphi' \operatorname{sen} \omega + \left[\operatorname{ang} \tan \frac{\varphi' \cos \omega}{\psi' - \omega'}\right]',$$

*) [illegible], ecc. del prof. BORDONI, inserita nel tomo I degli «Opuscoli fisici e matematici» pubblicati in Milano.

o per la (6):

$$\delta' = \varsigma' \operatorname{sen} \omega + \varepsilon', \tag{7}$$

relazione dovuta al prof. Bordoni.

Chiamando l la lunghezza della porzione di caratteristica compresa fra la linea che si considera e lo spigolo di regresso della superficie sviluppabile, trovasi:

$$l = \frac{s' \operatorname{sen} \varepsilon}{\delta'}, \tag{8}$$

essendo s l'arco della linea tracciata sulla superficie.

3. Immaginiamo la superficie gobba luogo geometrico delle normali alla superficie lungo quella linea. Sieno X, Y, Z le coordinate del punto in cui la generatrice corrispondente al punto di coordinate x, y, z incontra una linea qualsivoglia tracciata sulla superficie gobba; e t la distanza fra quei punti. Si avranno evidentemente le

$$X = x + ta, \qquad Y = y + tb, \qquad Z = z + tc, \tag{9}$$

le quali, derivate, dànno:

$$X' = x' + t'a + ta', \qquad Y' = y' + t'b + tb', \qquad Z' = z' + t'c + tc',$$

e da queste, moltiplicando ordinatamente per a', b', c' e sommando i risultati, si ottiene:

$$t\varsigma'^2 = a'X' + b'Y' + c'Z' + s'\varsigma' \cos \omega.$$

Se la linea immaginata sulla superficie gobba è la linea di stringimento di questa superficie, si ha

$$a'X' + b'Y' + c'Z' = 0,$$

e quindi

$$t = \frac{s'}{\varsigma'} \operatorname{sen} \varepsilon. \tag{10}$$

Questo valore sostituito nelle (9) conduce alle

$$X = x + \frac{a s'}{\varsigma'} \operatorname{sen} \varepsilon, \qquad Y = y + \frac{b s'}{\varsigma'} \operatorname{sen} \varepsilon, \qquad Z = z + \frac{c s'}{\varsigma'} \operatorname{sen} \varepsilon,$$

equazioni della linea di stringimento di quella superficie gobba.

4. Indichiamo con u, v le coordinate curvilinee di un punto della linea che si considera; poste le ordinarie denominazioni:

$$A = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}, \qquad B = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad C = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \qquad D = A\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + B\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + C\frac{\partial^2 z}{\partial u^2},$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}, \qquad D_1 = A\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + B\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + C\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v},$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2, \qquad D_2 = A\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + B\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + C\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\Delta = \sqrt{EG - F^2},$$

si hanno evidentemente le

$$-D = \frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial C}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u}, \text{ ecc.};$$

e quindi, rammentando essere a, b, c i coseni degli angoli che la normale alla superficie forma coi tre assi, si hanno le

$$-D = \Delta\left(\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial b}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial c}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u}\right),$$

$$-D_2 = \Delta\left(\frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial b}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial c}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

$$-D_1 = \Delta\left(\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial b}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial c}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$= \Delta\left(\frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial b}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial c}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right).$$

Notiamo di passaggio la relazione:

$$\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial b}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial c}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial b}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial c}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

fra due linee $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ a tangenti conjugate, la quale riducesi subito alla nota del Dupin; e le relazioni:

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{\partial a}{\partial u} & \frac{\partial b}{\partial u} & \frac{\partial c}{\partial u} \\ \frac{\partial a}{\partial v} & \frac{\partial b}{\partial v} & \frac{\partial c}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{1}{\Delta}\left|\begin{array}{ccc} a & b & c \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial a}{\partial v} & \frac{\partial b}{\partial v} & \frac{\partial c}{\partial v} \end{array}\right| - \frac{1}{\Delta}\left|\begin{array}{ccc} a & b & c \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial a}{\partial u} & \frac{\partial b}{\partial u} & \frac{\partial c}{\partial u} \end{array}\right| .$$

Sieno φ_u, ψ_u, ω_u; φ_v, ψ_v, ω_v per le linee $u=$ cost., $v=$ cost., quantità analoghe alle denominate φ, ψ, ω per la linea qualsivoglia. Osservando alle (3) si ottengono facilmente le

$$D=\Delta\frac{\partial\varphi_v}{\partial u}\cos\omega_v\sqrt{E}, \qquad D_2=\Delta\frac{\partial\varphi_u}{\partial v}\cos\omega_u\sqrt{G},$$

$$D_1=\Delta\left[\frac{\partial\varphi_v}{\partial u}\cos\omega_v\cos\lambda_{vu}+\frac{\partial(\psi_v-\omega_v)}{\partial u}(\cos\nu_{vu}\cos\omega_v-\cos\mu_{vu}\,\mathrm{sen}\,\omega_v)\right]\sqrt{E},$$

$$=\Delta\left[\frac{\partial\varphi_u}{\partial v}\cos\omega_u\cos\lambda_{uv}+\frac{\partial(\psi_u-\omega_u)}{\partial v}(\cos\nu_{uv}\cos\omega_u-\cos\mu_{uv}\,\mathrm{sen}\,\omega_u)\right]\sqrt{G},$$

essendo λ_{uv}, μ_{uv}, ν_{uv}; λ_{vu}, μ_{vu}, ν_{vu} i coseni degli angoli che la tangente alla linea $u=$ cost. fa colla tangente, la normale ordinaria, la perpendicolare al piano del circolo osculatore per la linea $v=$ cost.; e reciprocamente; per cui

$$\cos\lambda_{uv}=\cos\lambda_{vu}=\frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Se le linee $u=$ cost., $v=$ cost. sono ortogonali, si hanno le

$$D_1=\Delta\frac{\partial(\psi_v-\omega_v)}{\partial u}\sqrt{G}=\Delta\frac{\partial(\psi_u-\omega_u)}{\partial v}\sqrt{E}.$$

Indicando con θ_v, θ_u gli angoli che la tangente alla linea qualsivoglia sulla superficie forma colle tangenti alle linee $u=$ cost., $v=$ cost., il valore del coseno dell'angolo che la tangente alla prima linea comprende colla sua tangente conjugata trovasi facilmente essere

$$\cos\varepsilon=\frac{1}{H}\left[(u'D+v'D_1)\cos\theta_v\sqrt{G}-(u'D_1+v'D_2)\cos\theta_u\sqrt{E}\right],$$

essendo

$$H^2=E(u'D_1+v'D_2)^2+G(u'D+v'D_1)^2-2F(u'D_1+v'D_2)(u'D+v'D_1),$$

e quindi

$$\mathrm{sen}\,\varepsilon=\frac{1}{H}\left[(u'D+v'D_1)\,\mathrm{sen}\,\theta_v\sqrt{G}+(u'D_1+v'D_2)\,\mathrm{sen}\,\theta_u\sqrt{E}\right].$$

Inoltre si ha $\zeta' = \frac{H}{\Delta^2}$, per cui sono determinati i valori delle quantità $\varphi' \cos \omega$ e $\psi' - \omega'$, appartenenti alla linea qualunque, in funzione delle analoghe quantità corrispondenti alle linee $u =$ cost., $v =$ cost. Nel caso particolare, in cui queste ultime linee sieno linee di curvatura della superficie, saranno:

$$\cos \varepsilon = \frac{\Delta s'}{H} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \left(\frac{D}{E} - \frac{D_2}{G} \right) = \frac{\Delta^2 s'}{H} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right),$$

$$\operatorname{sen} \varepsilon = \frac{\Delta}{H} \left(\frac{D}{E} \cos^2 \theta + \frac{D_2}{G} \operatorname{sen}^2 \theta \right) = \frac{\Delta^2 s'}{H} \left(\frac{\cos^2 \theta}{R_1} + \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{R_2} \right),$$

$$H = \Delta^2 s' \sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{R_1^2} + \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{R_2^2}},$$

nelle quali $\theta = \theta_u$ ed R_1, R_2 sono i raggi di massima e minima curvatura della superficie corrispondenti alle linee $u =$ cost., $v =$ cost. Si hanno quindi le

$$\psi' - \omega' = s' \operatorname{sen} \theta \cos \theta \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \qquad \varphi' \cos \omega = s' \left(\frac{\cos^2 \theta}{R_1} + \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{R_2} \right),$$

$$\zeta' = s' \sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{R_1^2} + \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{R_2^2}},$$

e da queste:

$$\psi' - \omega' = \sqrt{\left(\frac{s'}{R_1} - \varphi' \cos \omega \right) \left(\varphi' \cos \omega - \frac{s'}{R_2} \right)}.$$

La prima delle formole superiori è dovuta a BERTRAND, la seconda è la nota relazione dell'EULERO, e la terza venne trovata da BONNET.

5. Le formole trovate nei n[i] precedenti si modificano allorquando la linea tracciata sulla superficie sia dotata di proprietà speciali, o si considerino superficie particolari. Eccone alcuni esempi.

La linea sia di curvatura. Si ha $\cos \varepsilon = 0$; quindi dalle (5):

$$\psi' - \omega' = 0, \qquad \zeta' = \pm \varphi' \cos \omega = \mp \frac{s'}{R},$$

essendo R il raggio di massima o minima curvatura corrispondente alla linea.

La prima di queste equazioni costituisce un teorema enunciato dal LANCRET, e dimostrato geometricamente da LIOUVILLE e da BONNET. Da essa deduconsi due noti teo-

remi di JACOBI e di JOACHIMSTHAL. Dalle (3) si hanno

$$a' = -\frac{s'}{R}a_1, \qquad b' = -\frac{s'}{R}b_1, \qquad c' = -\frac{s'}{R}c_1,$$

e le

$$a' : b' : c' = a_1 : b_1 : c_1$$

quali equazioni di una linea di curvatura. Dalla (7) si ha la

$$\delta' = \varphi' \text{sen}\,\omega,$$

e quindi dalle (8), (10):

$$\frac{1}{l} = \frac{\varphi' \text{sen}\,\omega}{s'}, \qquad \frac{1}{r} = \frac{\varphi' \cos\omega}{s'} = \frac{1}{R},$$

da cui

$$\frac{1}{l^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{\varphi'^2}{s'^2}.$$

Notisi essere la l il raggio di massima o di minima curvatura corrispondente alla linea immaginata, quando si consideri quest'ultima come linea di curvatura della superficie appartenente ad un sistema triplo ortogonale, dalla comune intersezione della quale colla superficie data risulta la linea medesima.

La linea sia geodetica. Si ha $\omega = 0$; la caratteristica della superficie sviluppabile coincide colla retta rettificante, la generatrice della superficie gobba col raggio di curvatura; e si hanno le

$$\sigma'^2 = \varphi'^2 + \psi'^2, \qquad \cos\varepsilon = \pm\frac{\psi'}{\sigma'}, \qquad \text{sen}\,\varepsilon = \pm\frac{\varphi'}{\sigma'}, \qquad l = \frac{s'}{\sigma'}\,\text{sen}\,\varepsilon.$$

La superficie sia l'ellissoide, rappresentata dall'equazione

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1.$$

Chiamando p la lunghezza della perpendicolare condotta dall'origine al piano tangente, si hanno le

$$a = p\frac{x}{\alpha^2}, \qquad b = p\frac{y}{\beta^2}, \qquad c = p\frac{z}{\gamma^2},$$

dalle quali:

$$a' = \frac{p'}{p}a + ps'\frac{a_1}{\alpha^2}, \qquad b' = \frac{p'}{p}b + ps'\frac{b_1}{\beta^2}, \qquad c' = \frac{p'}{p}c + ps'\frac{c_1}{\gamma^2}.$$

Per questi valori le prime due equazioni (2) diventano:

$$ps'\left(\frac{a_1^2}{\alpha^2} + \frac{b_1^2}{\beta^2} + \frac{c_1^2}{\gamma^2}\right) = -\varphi'\cos\omega,$$

$$\frac{p'}{p}\cos\omega + ps'\left(\frac{a_1 a_2}{\alpha^2} + \frac{b_1 b_2}{\beta^2} + \frac{c_1 c_2}{\gamma^2}\right) = (\psi' - \omega')\,\text{sen}\,\omega;$$

e siccome indicando con d il semidiametro dell'ellissoide parallelo alla tangente la linea si ha

$$\frac{1}{d^2} = \frac{a_1^2}{\alpha^2} + \frac{b_1^2}{\beta^2} + \frac{c_1^2}{\gamma^2},$$

così si avranno le

$$(11) \qquad p\,\frac{s'}{d^2} = -\varphi' \cos\omega, \qquad \frac{p'}{p}\cos\omega - p s' \frac{d'}{\varphi' d^3} = (\psi' - \omega') \operatorname{sen}\omega;$$

la seconda delle quali, avuto riguardo alla prima, si muta nella

$$\frac{p'}{p} + \frac{d'}{d} = (\psi' - \omega') \operatorname{tang}\omega.$$

Da questa, supponendo ω costante, si ha:

$$p d = A e^{\psi \operatorname{tang}\omega}.$$

Se supponiamo $\psi' = 0$, cioè per una linea piana qualsivoglia tracciata sull'ellissoide,

$$p d = A \cos\omega,$$

e tanto nel caso che $\psi' - \omega' = 0$ ovvero che $\omega = 0$, cioè per le linee di curvatura e per le geodetiche,

$$p d = A,$$

noto integrale dovuto al sig. JOACHIMSTHAL. I raggi di curvatura di queste linee si ottengono facilmente mediante la prima delle equazioni (11).

Pavia, giugno 1854.

[C.].

XIX.

INTORNO AD UNA NOTA PROPRIETÀ DI ALCUNE EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI.

Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, [illegible]

Una equazione alle derivate parziali del secondo ordine, per esempio la

$$(1) \qquad r + As + Bt + C = 0,$$

nella quale $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, ecc., può in alcuni casi non ammettere una equazione alle derivate prime parziali che la soddisfaccia.

È questa una proposizione notissima ai geometri, la quale ci valse i metodi di Laplace, Legendre, ecc. per l'integrazione delle equazioni alle derivate del secondo ordine senza far uso delle primitive di un ordine inferiore. Ed anche la ragione di questo fatto è evidente, giacchè il valore della z dato dalla primitiva generale può essere di tal forma, che non sia possibile l'eliminare da esso e da quelli delle sue derivate prime parziali una delle funzioni arbitrarie che compongono la primitiva generale.

Fra le equazioni per le quali verificasi questa proprietà trovasi la

$$(2) \qquad r - t - \frac{2p}{x} = 0.$$

Paoli e Lacroix mostrarono come questa equazione non ammetta primitiva alle derivate prime parziali, considerando che la sua primitiva generale

$$z = \varphi(y + x) + \psi(y - x) - x[\varphi'(y + x) - \psi'(y - x)]$$

è di tal forma che per essa verificasi la proprietà enunciata.

Il prof. Bordoni alla pag. 191 del tomo II delle sue *Lezioni di Calcolo sublime* arriva al medesimo risultato senza far uso della primitiva generale, il che è di grande vantaggio, come è facile a concepirsi. Richiamo brevemente il processo del Bordoni.

Indicando $f(x, y, z, p, q) = 0$ una primitiva della (1), la funzione f deve soddisfare o la prima e la terza, o la seconda e la terza, delle equazioni seguenti:

$$f'(q) - Mf'(p) = 0, \qquad f'(q) - Nf'(p) = 0,$$

$$\frac{1}{f'(p)}\Big[f'(x) + pf'(z)\Big] + \frac{B}{f'(q)}\Big[f'(y) + qf'(z)\Big] - C = 0,$$

posto

$$M = \tfrac{1}{2}(A + \sqrt{A^2 - 4B}), \qquad N = \tfrac{1}{2}(A - \sqrt{A^2 - 4B}).$$

Applicando queste formole alla (2), dalla prima si ha:

$$f = p + q + \varphi(x, y, z) = 0,$$

pel quale valore la terza diventa:

$$\varphi'(x) - \varphi'(y) + \varphi.\varphi'(z) + 2p\left(\varphi'(z) + \frac{1}{x}\right) = 0,$$

da cui

$$\varphi = -\frac{z}{x} + \lambda(x, y), \qquad \lambda'(x) - \lambda'(y) - \frac{\lambda}{x} + \frac{2z}{x^2} = 0,$$

all'ultima delle quali non può soddisfarsi colla λ funzione delle sole x, y.

La seconda dà

$$f = p - q + \Delta(x, y, z) = 0,$$

per la quale la terza diventa:

$$\Delta'(x) + \Delta'(y) + \Delta.\Delta'(z) + 2p\left(\Delta'(z) + \frac{1}{x}\right) = 0;$$

e quindi

$$\Delta = -\frac{z}{x} + \delta(x, y), \qquad \delta'(x) + \delta'(y) - \frac{\delta}{x} + \frac{2z}{x^2} = 0,$$

impossibile a soddisfarsi colla δ indipendente dalla z. Ne risulta che la (2) non ammette primitiva alle derivate del primo ordine.

Se la equazione proposta ad integrarsi è la

$$(3) \qquad r - t + \frac{2p}{x} = 0,$$

la prima e la terza dànno:

$$\gamma = -\frac{z}{x} + \gamma(x, y), \qquad \gamma'(\ ) - \gamma'(\ ) + \frac{\gamma}{x} = 0;$$

e la seconda e la terza dànno:

$$\Delta = -\frac{z}{x} + \delta(x, y), \qquad \delta'(\ ) + \delta'(\ ) + \frac{\delta}{x} = 0;$$

quindi le primitive alle derivate del primo ordine della (3) sono:

$$p + q + \frac{z + \varphi(y + x)}{x} = 0,$$

$$p - q + \frac{z + \psi(y - x)}{x} = 0.$$

La primitiva generale è la

$$z = \frac{\varphi(y + x) - \psi(y - x)}{x}.$$

A quelle due primitive alle derivate prime si giunge brevemente osservando che la (3) si può scrivere sotto le due seguenti forme:

$$[x(p + q) + z]' - [x(p + q) + z]_{,} = 0,$$

$$[x(p - q) + z]' + [x(p - q) + z]_{,} = 0.$$

La (2) non potrà ammettere analoghe trasformazioni.

Pavia, luglio 1854.

[C.].

XX.

SUR QUELQUES QUESTIONS D'ALGÈBRE SUPÉRIEURE *).

Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, t. V [illegible]

1. Soient $f(x)$, $\varphi(x)$ deux fonctions algébriques, rationnelles, entières et des degrés n, m respectivement ($n > m$). On représente par $x_1, x_2, \dots x_n$ les racines supposées inégales de l'équation $f(x) = 0$; et l'on pose

$$(1) \qquad \frac{x_1^r \varphi(x_1)}{f'(x_1)} + \frac{x_2^r \varphi(x_2)}{f'(x_2)} + \dots + \frac{x_n^r \varphi(x_n)}{f'(x_n)} = S_r,$$

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n,$$

$$\varphi(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \dots + b_m,$$

$$m = n - \varepsilon.$$

THÉORÈME I. — *En supposant $r < n$ et $\omega = r - \varepsilon + 1$ on a*

$$(2) \qquad a_0 S_r + a_1 S_{r-1} + a_2 S_{r-2} + \dots + a_\omega S = b_\omega.$$

---

*) [Qui, in luogo della Nota originalmente inserita negli « Annali di Scienze Matematiche e Fisiche », si riproduce l'edizione francese della medesima che, con aggiunte dell'Autore, fu pubblicata insieme ad altre Note e addizioni nella traduzione della Teoria dei determinanti: « *Théorie des déterminants et leurs principales applications*, par le Docteur F. BRIOSCHI; traduit de l'italien par « M. ÉDOUARD COMBESCURE; Paris, Mallet-Bachelier, imprimeur-libraire, 1856 » (pp. 151-170)].

Effectivement, si l'on représente par M_r le premier membre de cette équation, et qu'on y substitue les valeurs de S_r, S_{r-1}, ..., on obtient

$$M_r = \sum\left[(a_0 x^r + a_1 x^{r-1} + \dots + a_{r-1} x + a_r)\frac{\varphi(x)}{f'(x)}\right];$$

mais

$$(3) \qquad \frac{\partial a_{r+1}}{\partial x} = -(a_0 x^r + a_1 x^{r-1} + \dots + a_{r-1} x + a_r),$$

donc

$$M_r = -\sum\left[\frac{\partial a_{r+1}}{\partial x}\frac{\varphi(x)}{f'(x)}\right],$$

ou bien

$$-M_r = b_0\sum\left[\frac{\partial a_{r+1}}{\partial x}\frac{x^m}{f'(x)}\right] + b_1\sum\left[\frac{\partial a_{r+1}}{\partial x}\frac{x^{m-1}}{f'(x)}\right] + \dots + b_m\sum\left[\frac{\partial a_{r+1}}{\partial x}\frac{1}{f'(x)}\right],$$

ou bien encore, en observant que

$$(4) \qquad \frac{\partial x}{\partial a_s} = -\frac{x^{n-s}}{f'(x)},$$

$$(5) \quad M_r = b_0\sum\left[\frac{\partial a_{r+1}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a_{n-m}}\right] + b_1\sum\left[\frac{\partial a_{r+1}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a_{n-m+1}}\right] + \dots + b_m\sum\left[\frac{\partial a_{r+1}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a_n}\right],$$

et si l'on suppose $r + 1 = e + \omega$, cette équation donne

$$M_r = b_\omega.$$

Dans les applications de cette formule, lorsqu'on trouvera $\omega < 0$, il faudra faire $M_r = 0$, comme cela résulte de l'équation (5).

L'hypothèse $r = n$ entraine évidemment $M_n = 0$, et l'on a, en même temps,

$$(6) \qquad a_0 S_{n+m} + a_1 S_{n+m-1} + \dots + a_n S_m = 0.$$

Dans le cas particulier où $\varphi(x) = f'(x)$, les équations (2) et (6) sont les relations bien connues entre les coefficients et les sommes des puissances des racines de l'équation $f(x) = 0$.

On a supposé dans ce qui précède $m < n$; si l'on avait $m = n$ *), on trouverait, par une légère modification de la méthode,

$$(7) \qquad a_0 S_r + a_1 S_{r-1} + a_2 S_{r-2} + \dots + a_r S_0 = b_{r+1} - \frac{b_0 a_{r+1}}{a_0},$$

*) Ce qui suit jusqu'à (7) est emprunté à un manuscrit de l'auteur, postérieur à la Note des « Annali di Scienze Matematiche e Fisiche ». (*Note du Traducteur*).

ce qui, dans le cas de $r = 0$, reproduit la formule connue

$$\sum \frac{\varphi(x)}{f'(x)} = \frac{b_1}{a} - \frac{b\, a_1}{a^2}.$$

Pour montrer l'analogie des S_r avec les sommes des puissances des racines, soit fait, pour abréger,

$$A_r = \sqrt{\frac{\varphi(x_r)}{f'(x_r)}},$$

et considérons le déterminant

$$H = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ A_1 x_1 & A_2 x_2 & \dots & A_n x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1 x_1^{n-1} & A_2 x_2^{n-1} & \dots & A_n x_n^{n-1} \end{vmatrix};$$

on a évidemment

$$(\alpha) \qquad H^2 = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-2} \end{vmatrix} = \nabla;$$

mais

$$H = A_1 A_2 \dots A_n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

et, par suite,

$$H^2 = A_1^2 A_2^2 \dots A_n^2 \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix},$$

où $s_r = x_1^r + x_2^r + \dots + x_n^r$. Par conséquent, en représentant par Δ ce dernier déterminant, on aura

$$(a) \qquad A_1^2 A_2^2 \dots A_n^2\, \Delta = \nabla.$$

Or on sait que

$$f'(x_1) f'(x_2) \dots f'(x_n) = \Delta;$$

donc

$$(b) \qquad \varphi(x_1)\varphi(x_2) \dots \varphi(x_n) = \nabla.$$

Voici un autre résultat auquel sa singularité donne quelque importance. Considérons le déterminant

$$M = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ A_1 x_1 & A_2 x_2 & \dots & A_n x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1 x_1^{n-2} & A_2 x_2^{n-2} & \dots & A_n x_n^{n-2} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = A_2 A_3 \dots A_n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

On a

$$M = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{n-2} & A_1 \\ S_1 & S_2 & \dots & S_{n-1} & A_1 x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n-2} & S_{n-1} & \dots & S_{2n-3} & A_1 x_1^{n-2} \\ A_1 & A_1 x_1 & \dots & A_1 x_1^{n-2} & 1 \end{vmatrix},$$

et si l'on fait

$$\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{n-2} & 1 \\ S_1 & S_2 & \dots & S_{n-1} & x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n-2} & S_{n-1} & \dots & S_{2n-3} & x_1^{n-2} \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-2} & 0 \end{vmatrix} = k_1,$$

on pourra encore écrire

$$M^2 = \frac{\partial \nabla}{\partial S_{2n-2}} + A_1^2 k_1.$$

Or on sait que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}^2 = \frac{\Delta}{f'(x_1)^2};$$

donc, en se reportant à la seconde expression de M, on aura

$$A_2 A_3 \dots A_n \frac{\Delta}{f'(x_1)^2} = \frac{\partial \nabla}{\partial S_{2n-2}} + A_1^2 k_1.$$

Si l'on multiplie les deux membres de cette équation par $A_2^2 A_3^2 \dots A_n^2$, et qu'on ait égard à l'équation (a), il vient

$$A_1 A_2^3 \dots A_n^3 \frac{\Delta}{f'(x_1)} = A_2^2 A_3^2 \dots A_n^2 \frac{\partial \nabla}{\partial S_{2n-2}} + k_1 \frac{\nabla}{\Delta},$$

ou bien

$$\varphi(x_1)^2\varphi(x_2)^2\ldots\varphi(x_n)^2 = \varphi(x_2)\varphi(x_3)\ldots\varphi(x_n)f'(x_1)\frac{\partial\nabla}{\partial b_s} + \lambda_1\nabla.$$

Actuellement, si les équations $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$ ont en commun la seule racine x_1, il en résulte $\nabla = 0$, et l'équation précédente divisée par $\varphi(x_2)\varphi(x_3)\ldots\varphi(x_n)$ devient

$$\varphi(x_2)\varphi(x_3)\ldots\varphi(x_n) = f'(x_1)\frac{\partial\nabla}{\partial b_s},$$

résultat au moins singulier si l'on fait attention que $\frac{\partial\nabla}{\partial b_s}$ est fonction des seuls coefficients. Il est bon de remarquer que cette dernière relation ne subsiste plus si les équations ont quelque autre racine commune, parce qu'il devient alors impossible d'effectuer la division par $\varphi(x_2)\varphi(x_3)\ldots\varphi(x_n)$.

Les produits analogues à $\varphi(x_2)\varphi(x_3)\ldots\varphi(x_n)$ peuvent s'obtenir plus généralement de la manière suivante. Ayant fait

$$R_1 = \varphi(x_2)\varphi(x_3)\ldots\varphi(x_n), \quad R_2 = \varphi(x_1)\varphi(x_3)\ldots\varphi(x_n), \quad \text{etc.},$$

et supposant que les équations $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$ admettent la seule racine commune x_1, le résultat de l'élimination de x entre ces deux équations s'obtiendra en posant

$$\nabla = \varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n) = 0.$$

Or ∇ étant une fonction des coefficients $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots$, on aura

$$\frac{\partial\nabla}{\partial a_r} = \varphi'(x_1)\frac{\partial x_1}{\partial a_r}R_1 + \varphi'(x_2)\frac{\partial x_2}{\partial a_r}R_2 + \ldots + \varphi'(x_n)\frac{\partial x_n}{\partial a_r}R_n;$$

mais

$$\frac{\partial x}{\partial a_r} = -\frac{1}{f'(x)}x^{n-r};$$

donc

$$-\frac{\partial\nabla}{\partial a_r} = \frac{\varphi'(x_1)}{f'(x_1)}x_1^{n-r}R_1 + \frac{\varphi'(x_2)}{f'(x_2)}x_2^{n-r}R_2 + \ldots + \frac{\varphi'(x_n)}{f'(x_n)}x_n^{n-r}R_n.$$

Maintenant, par la méthode d'Abel (Serret, *Algèbre supérieure*, 2e édition, p. [illegible]), on a

$$\psi(x_1) = \frac{\sum R\theta(x)\psi(x)}{\sum R\theta(x)},$$

ψ et θ désignant des fonctions rationnelles et le $\sum$ se rapportant aux racines de

$f(x) = 0$. Si l'on prend

$$\psi(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n \quad \text{et} \quad \theta(x) = \frac{\varphi'(x)}{f'(x)},$$

on aura évidemment

$$\sum R\theta(x)\psi(x) = -\left(c_0 \frac{\partial \varpi}{\partial a_0} + c_1 \frac{\partial \varpi}{\partial a_1} + \ldots + c_n \frac{\partial \varpi}{\partial a_n}\right),$$

$$\sum R\theta(x) = -\frac{\partial \varpi}{\partial a_n},$$

et conséquemment

$$\psi(x_1) = \frac{1}{\frac{\partial \varpi}{\partial a_n}}\left(c_0 \frac{\partial \varpi}{\partial a_0} + c_1 \frac{\partial \varpi}{\partial a_1} + \ldots + c_n \frac{\partial \varpi}{\partial a_n}\right),$$

ce qui constitue une forme nouvelle propre à représenter une fonction rationnelle entière de la racine commune à deux équations. On en déduit sur-le-champ

$$x_1^n : x_1^{n-1} : \ldots : x_1 : 1 = \frac{\partial \varpi}{\partial a_0} : \frac{\partial \varpi}{\partial a_1} : \ldots : \frac{\partial \varpi}{\partial a_{n-1}} : \frac{\partial \varpi}{\partial a_n},$$

résultat obtenu par M. RICHELOT (« Nouvelles Annales », octobre 1854) par une autre méthode, et qui conduirait réciproquement à la formule qui vient de le fournir.

Supposons présentement

$$\psi(x) = \frac{f(x)}{x - x_1},$$

et posons

$$\sigma_i = \frac{x_2^i \varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \frac{x_3^i \varphi(x_3)}{\psi'(x_3)} + \ldots + \frac{x_n^i \varphi(x_n)}{\psi'(x_n)}.$$

On verra, comme lorsqu'il s'est agi de l'expression (α) de ϖ, que

$$R_1 = \begin{vmatrix} \sigma_0 & \sigma_1 & \ldots & \sigma_{n-2} \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \ldots & \sigma_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_{n-2} & \sigma_{n-1} & \ldots & \sigma_{2n-4} \end{vmatrix}.$$

Mais de $\psi(x) = \frac{f(x)}{x - x_1}$ on déduit

$$\psi'(x) = \frac{f'(x)}{x - x_1} - \frac{f(x)}{(x - x_1)^2},$$

On aperçoit sans peine que ce théorème est une conséquence du théorème I, qui montre que

$$T_s = x T_{s-1} - S_{s-1},$$

et, par suite,

$$(9) \qquad T_s = T_0 x^s - (x^{s-1} S_0 + x^{s-2} S_1 + \dots + x S_{s-2} + S_{s-1}).$$

3. Supposons que la recherche du plus grand commun diviseur de $f(x)$ et $\varphi(x)$, effectuée en changeant le signe du dividende et celui du diviseur dans chaque division partielle (comme cela se pratique dans le théorème de M. Sturm), conduise aux relations

$$(10) \quad \frac{f}{\varphi} = q_1 - \frac{r_1}{\varphi}, \quad \frac{\varphi}{r_1} = q_2 - \frac{r_2}{r_1}, \quad \dots, \quad \frac{r_{m-2}}{r_{m-1}} = q_m - \frac{r_m}{r_{m-1}}, \quad \frac{r_{m-1}}{r_m} = q_{m+1},$$

où: les $q_1, q_2, \dots q_{m+1}$ désignent les quotients obtenus dans les divisions successives, le premier étant en général du degré $n-m$ et les autres linéaires; et les $r_1, r_2, \dots r_m$ sont les restes correspondants dont les degrés respectifs sont généralement $m-1$, $m-2, \dots, 1, 0$. Si l'on représente par

$$\frac{N_1}{D_1}, \quad \frac{N_2}{D_2}, \quad \dots, \quad \frac{N_{m+1}}{D_{m+1}} = \frac{\varphi(x)}{f(x)}$$

les réduites successives de la fraction continue

$$\cfrac{1}{q_1 - \cfrac{1}{q_2 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{q_{m+1}}}}},$$

on aura

$$(11) \qquad r_1 = \varphi D_1 - f N_1, \quad r_2 = \varphi D_2 - f N_2, \quad \dots \quad r_m = \varphi D_m - f N_m$$

et les D_s, N_s seront du degré $n-m+s-1$ et $s-1$.

Cela posé, nous nous proposons le problème suivant:

Déterminer, en fonction des coefficients de $f(x)$ et $\varphi(x)$, les coefficients des résidus r, ceux des quotients q et ceux des numérateurs et dénominateurs N, D.

D'après les formules de la décomposition des fractions on a

$$\sum \frac{r_s(x)}{f'(x)} = 0, \quad \sum \left[x \frac{r_s(x)}{f'(x)} \right] = 0, \quad \dots \quad \sum \left[x^{n-m+s-1} \frac{r_s(x)}{f'(x)} \right] = \frac{A_s}{a_0},$$

A_s désignant le coefficient de x^{m-s} dans le polynôme $r_s(x)$; et comme les équations (11) donnent

$$r_s(x_i) = \varphi(x_i) D_s(x_i),$$

et en substituant dans ces équations les valeurs

$$r_i = A_i x^{m} + \ldots, \quad D_i = c_i x^{m+1} + \ldots,$$

on en conclut sur-le-champ

$$A_i c_i = a_0,$$

c'est-à-dire, en ayant égard à la valeur de c_i et observant que $\dfrac{\partial \Delta_i}{\partial S_{2i-2}} = \Delta_{i-1}$,

$$(12') \qquad A_i A_{i-1} = a_0^2 \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}};$$

en outre, on a évidemment $A_0 = b_0$.

Au moyen des formules (2), (6) on passera de ces expressions qui sont formées avec les S aux expressions analogues formées avec les coefficients des fonctions $f(x), \varphi(x)$.

La théorie de la décomposition des fractions rationnelles donne

$$\frac{r_i(x)}{f(x)} = \sum \left[\frac{r_i(x_k)}{(x - x_k) f'(x_k)} \right] = \sum \left[\frac{D_i(x_k)\varphi(x_k)}{(x - x_k) f'(x_k)} \right],$$

ce qui, en ayant égard à l'équation (12) et à l'expression (7) de T_k, se transforme aisément en

$$(13) \qquad \frac{r_i(x)}{f(x)} = \frac{A_i}{a_0 \Delta_i} \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \ldots & S_{i-1} \\ S_1 & S_2 & \ldots & S_i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{i-2} & S_{i-1} & \ldots & S_{2i-3} \\ T_0 & T_1 & \ldots & T_{i-1} \end{vmatrix}.$$

De là, par les formules (2), (6) et (8), on déduira les coefficients $r_i(x)$ exprimés par ceux de $f(x)$, $\varphi(x)$.

D'après l'équation (9), si l'on fait

$$x^{i-1} S_0 + x^{i-2} S_1 + \ldots + x S_{i-2} + S_{i-1} = f_{i-1},$$

en sorte que

$$T_{i-1} = T_0 x^{i-1} - f_{i-1},$$

le déterminant qui figure dans le second membre de l'équation précédente se partagera dans les deux suivants :

$$\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \ldots & S_{i-1} \\ S_1 & S_2 & \ldots & S_i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{i-2} & S_{i-1} & \ldots & S_{2i-3} \\ T_0 & T_0 x & \ldots & T_0 x^{i-1} \end{vmatrix}, \qquad - \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \ldots & S_{i-1} \\ S_1 & S_2 & \ldots & S_i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{i-2} & S_{i-1} & \ldots & S_{2i-3} \\ 0 & f_1 & \ldots & f_{i-1} \end{vmatrix}.$$

En désignant par $x', x'', \ldots x^{(m)}$ les racines de l'équation $\varphi(x) = 0$, on déduit de la précédente :

$$f'(x_i)\varphi(x_i) = \varphi^2(x_i)\, q_1'(x_i) + \alpha_2 r_1^2(x_i) + \ldots + \alpha_{m+1} r_m^2,$$

$$-\varphi'(x^{(i)}) f(x^{(i)}) = \alpha_2 r_1^2(x^{(i)}) + \alpha_3 r_2^2(x^{(i)}) + \ldots + \alpha_{m+1} r_m^2,$$

et celles-ci, quand on a égard à (11), fournissent

$$\frac{f'(x_i)}{\varphi(x_i)} = q_1'(x_i) + \alpha_2 D_1^2(x_i) + \alpha_3 D_2^2(x_i) + \ldots + \alpha_{m+1} D_m^2(x_i),$$

$$-\frac{\varphi'(x^{(i)})}{f(x^{(i)})} = \alpha_2 N_1^2(x^{(i)}) + \alpha_3 N_2^2(x^{(i)}) + \ldots + \alpha_{m+1} N_m^2(x^{(i)}).$$

Si l'on suppose

$$m = n - 1,$$

et, par conséquent,

$$q_1 = \alpha_1 x + \beta_1,$$

la première de ces équations donne

$$(14) \qquad \begin{vmatrix} p(x_1) & p(x_2) & \ldots & p(x_n) \\ D_1^2(x_1) & D_1^2(x_2) & \ldots & D_1^2(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ D_{n-1}^2(x_1) & D_{n-1}^2(x_2) & \ldots & D_{n-1}^2(x_n) \end{vmatrix} = 0,$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$p(x_i) = \alpha_1 - \frac{f'(x_i)}{\varphi(x_i)}.$$

Dans le cas particulier où

$$\varphi(x) = f'(x),$$

la première ligne du déterminant qui précède devient divisible par $\alpha_1 - 1$, et l'on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ D_1^2(x_1) & D_1^2(x_2) & \ldots & D_1^2(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ D_{n-1}^2(x_1) & D_{n-1}^2(x_2) & \ldots & D_{n-1}^2(x_n) \end{vmatrix} = 0,$$

propriété déjà énoncée par M. SYLVESTER. L'équation (14) vérifie la conjecture de ce géomètre distingué relativement à l'existence d'une équation analogue à cette dernière dans le cas général où $\varphi(x)$ serait une fonction quelconque du degré $(n - 1)$ *).

*) SYLVESTER, *On a Theory of the syzygetic relations of two rational integral Functions*, etc. (Philosophical Transactions, 1853, part III, page 480).

quand on a égard à l'équation

$$S_{i-1} - xT_{i-1} = -T_i,$$

se transformer dans le suivant :

$$\begin{vmatrix} T_0 & T_1 & \dots & T_{i-1} \\ T_1 & T_2 & \dots & T_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{i-1} & T_i & \dots & T_{2i-2} \end{vmatrix};$$

et conséquemment, en posant

$$F = \sum \left[\frac{\varphi(x_r)}{(x - x_r) f'(x_r)} (y_0 + x_r y_1 + x_r^2 y_2 + \dots + x_r^{i-1} y_{i-1})^2 \right],$$

ce même déterminant ne sera autre chose que le discriminant de la fonction quadratique F. Dans le cas de $\varphi(x) = f'(x)$, ce théorème avait déjà été énoncé par M. HERMITE dans son intéressant Mémoire : *Remarques sur le théorème de M. Sturm*, présenté à l'Académie des Sciences le 14 février 1853 (Comptes rendus, t. XXXVI, p. 294).

Les valeurs des résidus exprimées au moyen des racines de $f(x) = 0$ peuvent aisément s'obtenir en considérant les mêmes résidus sous cette dernière forme. Ainsi, par exemple,

$$\begin{vmatrix} T_0 & T_1 \\ T_1 & T_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum \frac{\varphi(x_r)}{(x - x_r) f'(x_r)} & \sum \frac{x_r \varphi(x_r)}{(x - x_r) f'(x_r)} \\ \sum \frac{x_r \varphi(x_r)}{(x - x_r) f'(x_r)} & \sum \frac{x_r^2 \varphi(x_r)}{(x - x_r) f'(x_r)} \end{vmatrix},$$

ou bien

$$\begin{vmatrix} T_0 & T_1 \\ T_1 & T_2 \end{vmatrix} = \sum \sum \frac{\varphi(x_r)\varphi(x_s)}{f'(x_r) f'(x_s)} \frac{1}{(x - x_r)(x - x_s)} \begin{vmatrix} 1 & x_s \\ x_r & x_s^2 \end{vmatrix},$$

ou encore

$$\begin{vmatrix} T_0 & T_1 \\ T_1 & T_2 \end{vmatrix} = \mathbf{S} \frac{\varphi(x_r)\varphi(x_s)}{f'(x_r) f'(x_s)} \frac{(x_r - x_s)^2}{(x - x_r)(x - x_s)}.$$

Semblablement

$$\begin{vmatrix} T_0 & T_1 & T_2 \\ T_1 & T_2 & T_3 \\ T_2 & T_3 & T_4 \end{vmatrix} = \mathbf{S} \frac{\varphi(x_r)\varphi(x_s)\varphi(x_t)}{f'(x_r) f'(x_s) f'(x_t)} \frac{(x_r - x_s)^2 (x_r - x_t)^2 (x_s - x_t)^2}{(x - x_r)(x - x_s)(x - x_t)},$$

et ainsi de suite. Le symbole $\mathbf{S}$ représente la somme d'autant de produits, analogues

et pour s impair,

$$A = \frac{a_0}{b_0}\,\frac{\Delta_2^2\Delta_4^2\ldots\Delta_{s-1}^2}{\Delta_3^2\Delta_5^2\ldots\Delta_s^2}\,\Delta_{s-1}.$$

Quant aux Δ, on les calculerait comme les résidus, et l'on trouverait

$$\Delta_2 = \frac{1}{a_0^3}\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_0 & b_1 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \frac{1}{a_0^5}\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}, \qquad \ldots$$

Des valeurs de $r(x)$ on déduit celles de $D(x)$, $N(x)$, exprimées déjà au moyen des coefficients des fonctions de $\varphi(x)$, $f(x)$, et cela par la forme même du déterminant second membre de la valeur de $r(x)$, ainsi qu'on l'a indiqué à la fin du n° 3.

Les expressions trouvées pour $r(x)$ et Δ restent encore les mêmes dans le cas où $m < n - 1$; il faut seulement avoir soin de remplacer par des zéros certains coefficients convenables des fonctions $\varphi(x)$, $f(x)$.

Pavie, 16 août 1854.

[G.].

XXI.

SULLE FUNZIONI SIMMETRICHE DELLE RADICI DI UNA EQUAZIONE.

Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, [illegible]

NOTA PRIMA.

Sieno x_1, x_2, ... x_n le radici dell'equazione

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0,$$

e considero la funzione simmetrica delle radici:

$$\varphi = \sum x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma \dots,$$

dove α, β, γ, ... sono numeri interi positivi. Se coi noti metodi formasi la funzione φ mediante i coefficienti dell'equazione, essa risulterà composta di termini della forma:

$$(1) \qquad \pm a_{r_1}^{s_1} a_{r_2}^{s_2} \dots a_{r_i}^{s_i};$$

e se chiamiamo *indice* di un termine qualunque il numero

$$r_1 s_1 + r_2 s_2 + \dots + r_i s_i,$$

avrà luogo il seguente teorema:

Una funzione simmetrica φ delle radici di una equazione espressa mediante i coefficienti della stessa avrà tutti i suoi termini del medesimo indice o sarà OMOGENEA IN INDICE.

La dimostrazione di questo teorema si appoggia ad una formola da noi data nella

Nota « *Sulla teorica degli invarianti* » *). Questa formola è la

$$\sum x \frac{\partial \varphi}{\partial x} = a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + 2 a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \dots + n a_n \frac{\partial \varphi}{\partial a_n}.$$

Ora, essendo

$$\sum x \frac{\partial \varphi}{\partial x} = (\alpha + \beta + \gamma + \dots) \varphi,$$

si avrà:

$$(2) \qquad a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + 2 a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \dots + n a_n \frac{\partial \varphi}{\partial a_n} = (\alpha + \beta + \gamma + \dots) \varphi.$$

Quindi, se con (1) rappresentasi uno qualunque dei termini di φ, si avrà:

$$r_1 s_1 + r_2 s_2 + \dots + r_n s_n = \alpha + \beta + \gamma + \dots \text{ **)},$$

e quindi l'indice di uno qualsivoglia dei termini della funzione simmetrica, espressa mediante i coefficienti, sarà eguale al grado della funzione medesima espressa mediante le radici.

Da ciò si deduce quale corollario un teorema del sig. Transon pubblicato nelli « Nouvelles Annales », t. IX (1850), p. 84.

Se con ψ indichiamo una funzione algebrica, razionale, intera, dall'equazione (2) si ha:

$$\varphi = a_1^{\alpha + \beta + \gamma + \dots} \psi \left(\frac{a_2}{a_1^2}, \frac{a_3}{a_1^3}, \dots \frac{a_n}{a_1^n} \right).$$

Mediante la proprietà su esposta e scritta in quest'ultima equazione, giovandoci dell'importante teorema del Sylvester « che il grado della funzione φ espressa coi coefficienti non può superare il maggiore dei numeri α, β, γ, ... » ***), possiamo in ogni caso determinare la forma della funzione medesima.

Per esempio, supponendo

$$\alpha = 3, \quad \beta = 2, \quad \gamma = \text{ecc.} \dots = 0,$$

si avrebbe φ del terzo grado e di indice 5 in ciascun termine, per cui la forma di φ risulterebbe:

$$\varphi = A a_1 a_2^2 + B a_1^2 a_3 + C a_2 a_3 + D a_1 a_4 + E a_5,$$

---

*) T. VII, pp. 111-114 [p. 135].

**) Questa proprietà pel caso particolare delle somme delle potenze delle radici trovasi enunciata nelle *Meditationes algebraicae* di Waring.

***) Philosophical Magazine, vol. V (1853), p. 209.

nella quale *A*, *B*, *C*, ... sono coefficienti numerici

$$(A = -1, \quad B = 2, \quad C = 1, \quad D = -5, \quad E = 5).$$

Così, se fosse $\alpha = 4$, $\beta = 1$, si avrebbe:

$$\varphi = A a_1^3 a_2 + B a_1^2 a_3 + C a_1 a_2^2 + D a_1 a_4 + E a_2 a_3 + F a_5$$

$$(A = -1, \quad B = 1, \quad C = 3, \quad D = -5, \quad E = -1, \quad F = 5)$$

e supponendo $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$ si ha:

$$\varphi = A a_2 a_3 + B a_1 a_4 + C a_5$$

$$(A = -1, \quad B = 3, \quad C = -5);$$

e supponendo

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 1, \quad \delta = 1, \quad \varepsilon = 1$$

si ottiene:

$$\varphi = A a_5 \qquad (A = -1).$$

La omogeneità in indice è anche una delle proprietà caratteristiche degli invarianti delle funzioni omogenee a due variabili.

Pavia, 28 agosto 1854.

NOTA SECONDA.

Nella Nota precedente ho dimostrata una proprietà delle funzioni simmetriche intere delle radici di una equazione, per mezzo della quale proprietà si può determinare la forma che assume la funzione simmetrica medesima allorquando venga espressa in funzione dei coefficienti della equazione. Lo scopo della presente Nota è di far conoscere un metodo mediante il quale si possono determinare i valori dei coefficienti numerici.

Sieno x_1, x_2, ... x_n le radici dell'equazione

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0.$$

Indico con φ una funzione qualsivoglia dei coefficienti della medesima, e con s_r la somma delle potenze erresime delle radici. Rammentando le relazioni esistenti fra i coefficienti,

le radici e le somme delle potenze di queste, per una stessa equazione, si concepiscono facilmente le

$$(1)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial s_r} &= \frac{\partial \varphi}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial s_r} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial s_r} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial s_r} \\ \frac{\partial a_i}{\partial s_r} &= \frac{\partial a_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial s_r} + \frac{\partial a_i}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial s_r} + \dots + \frac{\partial a_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial s_r}. \end{aligned} \right.$$

Ora si ha:

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_s} = -(a_{i-1} + a_{i-2}x_s + \dots + a_1 x_s^{i-2} + x_s^{i-1});$$

quindi sostituendo:

$$-\frac{\partial a_i}{\partial s_r} = a_{i-1}\sum_m \frac{\partial x_m}{\partial s_r} + a_{i-2}\sum_m \frac{\partial x_m}{\partial s_r} x_m + \dots + \sum_m \frac{\partial x_m}{\partial s_r} x_m^{i-1},$$

dalla quale evidentemente:

$$\frac{\partial a_i}{\partial s_r} = -\frac{1}{r} a_{i-r}, \quad \text{per } i > r, \qquad \frac{\partial a_i}{\partial s_r} = 0, \quad \text{per } i < r;$$

$$\frac{\partial a_r}{\partial s_r} = -\frac{1}{r}.$$

Per questi valori la (1) si trasforma nella

$$(2)\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial a_r} + a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_{r+1}} + a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_{r+2}} + \dots + a_{n-r}\frac{\partial \varphi}{\partial a_n} + r\frac{\partial \varphi}{\partial s_r} = 0,$$

dalla quale interessante relazione possiamo dedurne molte altre. Accenneremo fra queste la seguente:

$$s_i \frac{\partial \varphi}{\partial a_r} + (s_{i+1} + a_1 s_i)\frac{\partial \varphi}{\partial a_{r+1}} + \dots + (s_{i+n-r} + \dots + a_{n-r} s_i)\frac{\partial \varphi}{\partial a_n}$$

$$= -\left[r s_i \frac{\partial \varphi}{\partial s_r} + (r+1) s_{i+1}\frac{\partial \varphi}{\partial s_{r+1}} + \dots + n s_{i+n-r}\frac{\partial \varphi}{\partial s_n} \right]$$

e l'altra che si ottiene facendo in quest'ultima $r = s = i = 1$, cioè la

$$a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + 2 a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \dots + n a_n \frac{\partial \varphi}{\partial a_n} = s_1 \frac{\partial \varphi}{\partial s_1} + 2 s_2 \frac{\partial \varphi}{\partial s_2} + \dots + n s_n \frac{\partial \varphi}{\partial s_n},$$

per la quale, supponendo φ algebrica razionale intera, l'omogeneità in indice rispetto ai coefficienti ha per conseguenza l'omogeneità in indice rispetto alle somme delle potenze, e reciprocamente.

Supponiamo ora che φ sia una funzione simmetrica intera delle radici dell'equazione proposta, e sia

$$\varphi = \sum x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} .$$

È noto che la funzione φ è esprimibile mediante le somme delle potenze delle radici, ed osservando alle forme di queste espressioni si concepisce facilmente essere

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s_{\alpha_1}} = \sum x_1^{\alpha_2} x_2^{\alpha_3} \dots x_{n-1}^{\alpha_n} ,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s_{\alpha_1 + \alpha_2}} = - \sum x_1^{\alpha_3} x_2^{\alpha_4} \dots x_{n-2}^{\alpha_n} , \quad \text{ecc.}$$

Quindi, se supponiamo già calcolate alcune di queste funzioni simmetriche di grado minore, conoscendo la forma della funzione φ, la equazione (2) e le analoghe serviranno a determinare i coefficienti numerici.

Esempio. — Sia

$$\varphi = \sum x_1^4 x_2^3 x_3 ;$$

per quanto si è dimostrato nella Nota citata, la φ espressa mediante i coefficienti sarà del quarto grado, ed omogenea in indice dell'ottavo ordine. Quindi:

$$\varphi = A a_1^3 a_5 + B a_1^2 a_6 + C a_1^2 a_2 a_4 + D a_1^2 a_3^2 + E a_1 a_7 + F a_1 a_2 a_5 + G a_1 a_3 a_4$$
$$+ I a_1 a_2^2 a_3 + H a_2 a_6 + K a_2^2 a_4 + L a_3 a_5 + M a_2 a_3^2 + N a_4^2 + P a_8 .$$

Supponiamo conosciute le

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s_3} = \sum x_1^4 x_2 = - a_1^3 a_2 + a_1^2 a_3 + 3 a_1 a_2^2 - 5 a_2 a_3 - a_1 a_4 + 5 a_5 ,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s_4} = \sum x_1^3 x_2 - \sum x_1^4 = - a_1^4 + 5 a_1^2 a_2 - 5 a_1 a_3 - 4 a_2^2 + 8 a_4 ,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s_5} = - \sum x_1^3 = a_1^3 - 3 a_1 a_2 + 3 a_3 ,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s_7} = - \sum x_1 = a_1 ,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s_8} = 2 .$$

Dalla (2) si hanno quindi in questo caso particolare:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_3} + a_1 \frac{\partial\varphi}{\partial a_4} + \dots\dots\dots + a_5 \frac{\partial\varphi}{\partial a_8} + 3\frac{\partial\varphi}{\partial s_3} = 0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_4} + \dots\dots\dots + a_4 \frac{\partial\varphi}{\partial a_8} + 4\frac{\partial\varphi}{\partial s_4} = 0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_5} + \dots + a_3 \frac{\partial\varphi}{\partial a_8} + 5\frac{\partial\varphi}{\partial s_5} = 0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_7} + a_1 \frac{\partial\varphi}{\partial a_8} + 7\frac{\partial\varphi}{\partial s_7} = 0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_8} + 8\frac{\partial\varphi}{\partial s_8} = 0,$$

dalle quali sostituendo e raccogliendo si ottengono le:

$$\begin{aligned} &a_1^3 a_2 (C + A - 3) + a_1^2 a_3 (2D + G + B + 3) \\ &+ a_1 a_2 (I + K + F + 9) + a_2 a_3 (2M + L + H - 15) \\ &+ a_2 a_4 (G + 2N + E - 3) + a_4 (L + P + 15) = 0, \quad \text{ecc.}, \end{aligned}$$

le quali, dovendo essere identiche, dànno luogo alle

$$C + A - 3 = 0, \quad 2D + G + B + 3 = 0, \quad I + K + F + 9 = 0, \quad \text{ecc.}$$

e da queste assai facilmente si hanno i valori richiesti:

$$A = 4, \quad B = -9, \quad C = -1, \quad D = -2, \quad E = 9,$$

$$F = -10, \quad G = 10, \quad I = 1, \quad H = 16, \quad K = 0,$$

$$L = 1, \quad M = -1, \quad N = -8, \quad P = -16.$$

Osserviamo che nella trattazione di questo esempio si potevano scegliere, come conosciute, funzioni simmetriche più convenienti, quali sarebbero le $\frac{\partial\varphi}{\partial s_2}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial s_6}$, le quali sono ambedue evidentemente eguali a zero; si sono scelte le superiori per mostrare la brevità e semplicità del metodo anche nelle condizioni meno opportune.

Allorquando però sieno conosciute in funzione dei coefficienti tutte le funzioni simmetriche di grado minore della φ, cioè le $\frac{\partial\varphi}{\partial s_1}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial s_2}$, ecc., si può ottenere il valore di φ anche nel modo seguente.

in luogo dei primi che dei secondi indici, in modo però che in $i-1$ qualsivogliano di quelle quantità a le $i-1$ lettere distribuite nei primi indici non sieno le stesse di quelle poste nei secondi, ma differiscano di una, così per $i-2$, per $i-3$, ecc. di esse quantità. Quindi sarà:

$$s_{r_1+r_2+r_3+r_4} = a_{1,2}\,a_{3,1}\,a_{2,4}\,a_{4,3} = a_{1,2}\,a_{4,1}\,a_{2,3}\,a_{3,4}$$

ed

$$a_{1,2}\,a_{2,3}\,a_{3,1}\,a_{4,4} = s_{r_1+r_2+r_3}\,s_{r_4}$$

$$a_{1,2}\,a_{2,1}\,a_{3,4}\,a_{4,3} = s_{r_1+r_2}\,s_{r_3+r_4}.$$

Ciò posto, si ha evidentemente:

$$\sum x_1^{r_1} x_2^{r_2} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = s_{r_1} s_{r_2} - s_{r_1+r_2},$$

$$\sum x_1^{r_1} x_2^{r_2} x_3^{r_3} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

$$= s_{r_1} s_{r_2} s_{r_3} - s_{r_1} s_{r_2+r_3} - s_{r_2} s_{r_1+r_3} - s_{r_3} s_{r_1+r_2} + 2\, s_{r_1+r_2+r_3},$$

ed in generale:

$$\sum x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_i^{r_i} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,i} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,i} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \ldots & a_{i,i} \end{vmatrix}.$$

[G.].

L'espressione u è il noto discriminante della funzione omogenea del terzo grado:

$$(2) \qquad a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 y + 3 a_2 x y^2 + a_3 y^3;$$

ed indicando con U il discriminante della

$$(3) \qquad \frac{\partial u}{\partial a_0} x^3 + \frac{\partial u}{\partial a_1} x^2 y + \frac{\partial u}{\partial a_2} x y^2 + \frac{\partial u}{\partial a_3} y^3,$$

la equazione (1) si può scrivere:

$$U = 16 u^3.$$

Il sig. SYLVESTER ha denominato la espressione (3) l'*evettante* del discriminante della (2), od in generale, considerando una funzione omogenea dell'ennesimo grado

$$(4) \qquad a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{2} a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + a_n y^n$$

ed indicando con φ un invariante qualunque della medesima, ha chiamato evettante di esso invariante la

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_0} x^n + \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} x^{n-1} y + \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} x^{n-2} y^2 + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial a_n} y^n.$$

Ciò posto, la relazione dell'EISENSTEIN può essere dimostrata e generalizzata mediante il seguente teorema:

Un invariante qualunque dell'evettante di un invariante di una funzione omogenea dell'ennesimo grado è una funzione algebrica, intera, razionale degli invarianti della funzione medesima.

Questo teorema si potrebbe dedurre dall'importante legge di reciprocità del SYLVESTER *), ma stimiamo non inutile il dimostrarlo direttamente nel modo che segue.

Un invariante qualunque φ della funzione (4) deve, come è noto, soddisfare alle due equazioni **):

$$(5) \qquad \begin{cases} a_0 z_1 + 2 a_1 z_2 + 3 a_2 z_3 + \ldots + n a_{n-1} z_n = 0, \\ n a_1 z_0 + (n-1) a_2 z_1 + \ldots + a_n z_{n-1} = 0, \end{cases}$$

essendosi posto $\frac{\partial \varphi}{\partial a_r} = z_r$; ed analogamente un invariante ψ dell'evettante dell'inva-

*) *On the principles of the Calculus of Forms.* Sect. IV. (The Cambridge and Dublin Mathematical Journal, vol. VII (1852), p. 179).

**) Il sig. CAYLEY è giunto a dimostrare che una sola equazione e la condizione di omogeneità sono sufficienti a determinare un invariante, ma non credo ancora fatto pubblico questo importante risultato.

riante φ,

$$\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} y + \alpha_2 x^{n-2} y^2 + \dots + \alpha_n y^n,$$

verrà determinato dalle due equazioni:

$$(6) \quad \begin{cases} n\alpha_0 \dfrac{\partial\psi}{\partial\alpha_1} + (n-1)\alpha_1 \dfrac{\partial\psi}{\partial\alpha_2} + \dots + \alpha_{n-1} \dfrac{\partial\psi}{\partial\alpha_n} = 0, \\[2ex] \alpha_1 \dfrac{\partial\psi}{\partial\alpha_0} + 2\alpha_2 \dfrac{\partial\psi}{\partial\alpha_1} + \dots + n\alpha_n \dfrac{\partial\psi}{\partial\alpha_{n-1}} = 0. \end{cases}$$

È evidente che ψ sarà una funzione algebrica intera razionale dei coefficienti $a_0, a_1, \dots$, e che

$$\frac{\partial\psi}{\partial a_r} = \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_0}\frac{\partial\alpha_0}{\partial a_r} + \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_1}\frac{\partial\alpha_1}{\partial a_r} + \dots + \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_n}\frac{\partial\alpha_n}{\partial a_r}.$$

Mediante le equazioni che si deducono da questa ponendo $r = 0, 1, 2, \dots n$, e dalle

$$a_0 \frac{\partial\alpha_r}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial\alpha_r}{\partial a_2} + \dots + na_{n-1} \frac{\partial\alpha_r}{\partial a_n} = -(r+1)\alpha_{r+1},$$

$$na_1 \frac{\partial\alpha_r}{\partial a_0} + (n-1)a_2 \frac{\partial\alpha_r}{\partial a_1} + \dots + a_n \frac{\partial\alpha_r}{\partial a_{n-1}} = -(n-r+1)\alpha_{r-1}$$

e le loro analoghe, che si hanno derivando rispetto ad a_0, $a_1 \dots a_n$ le equazioni identiche (5), si ottengono le due seguenti:

$$a_0 \frac{\partial\psi}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial\psi}{\partial a_2} + \dots + na_{n-1} \frac{\partial\psi}{\partial a_n}$$
$$= -\left[\alpha_1 \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_0} + 2\alpha_2 \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_1} + \dots + n\alpha_n \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_{n-1}}\right],$$

$$na_1 \frac{\partial\psi}{\partial a_0} + (n-1)a_2 \frac{\partial\psi}{\partial a_1} + \dots + a_n \frac{\partial\psi}{\partial a_{n-1}}$$
$$= -\left[n\alpha_0 \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_1} + (n-1)\alpha_1 \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_2} + \dots + \alpha_{n-1} \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_n}\right];$$

ossia, avendo riguardo alle (6),

$$a_0 \frac{\partial\psi}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial\psi}{\partial a_2} + \dots + na_{n-1} \frac{\partial\psi}{\partial a_n} = 0,$$

$$na_1 \frac{\partial\psi}{\partial a_0} + (n-1)a_2 \frac{\partial\psi}{\partial a_1} + \dots + a_n \frac{\partial\psi}{\partial a_{n-1}} = 0;$$

le quali dimostrano essere ψ un invariante della funzione (4), od in generale una funzione algebrica, intera, razionale degli invarianti della medesima.

Se supponiamo l'invariante φ dell'emmesimo grado, e l'invariante ψ dell'erresimo grado rispetto ai coefficienti dell'evettante, quest'ultimo invariante sarà del grado $r(m-1)$ rispetto ai coefficienti della funzione.

Pel caso che la funzione sia del terzo grado, l'unico invariante della medesima è il discriminante u; quindi il discriminante U dell'evettante di u (il quale sarà del grado $4 . 3$) dovrà essere eguale ad una funzione algebrica, intera, razionale del terzo grado di u, cioè dovrà essere:

$$U = h u^3,$$

essendo h un coefficiente numerico, che si è veduto eguale a 16.

Considerando la funzione del quarto grado

$$a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 y + 6 a_2 x^2 y^2 + 4 a_3 x y^3 + a_4 y^4,$$

si hanno: il quadrinvariante

$$Y_2 = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2;$$

il cubinvariante

$$Y_3 = a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_4 a_1^2 - a_2^3;$$

ed il discriminante

$$D = Y_2^3 - 27 Y_3^2. \tag{7}$$

Indicherò con E_2, E_3, E_6 gli evettanti corrispondenti a questi tre invarianti, e con $Y_2(E_2)$, $Y_3(E_2)$ gli invarianti quadratico e cubico dell'evettante E_2; ecc.

Considerando, per esempio, la forma $Y_3(E_6)$, evidentemente del 15° grado, pel teorema superiore si avrà:

$$Y_3(E_6) = l Y_2^6 Y_3 + m Y_2^3 Y_3^3 + n Y_3^5;$$

e così per la forma $Y_2(E_3)$ del quarto grado si avrà:

$$Y_2(E_3) = p Y_2^2,$$

nelle quali le l, m, n, p sono numeri. Per la funzione omogenea del quarto grado questi coefficienti numerici si ottengono facilmente, e si hanno le relazioni:

$$Y_2(E_2) = Y_2, \quad Y_2(E_3) = \frac{1}{12} Y_2^2, \quad Y_2(E_6) = 9 Y_2^2 (Y_2^3 - 27 Y_3^2) = 9 Y_2^2 D.$$

Così:

$$Y_3(E_2) = Y_3, \quad Y_3(E_3) = \frac{1}{216}(54 Y_3^2 - Y_2^3), \quad Y_3(E_6) = -54 Y_3 (Y_2^3 - 27 Y_3^2)^2 = -54 Y_3 D^2.$$

Da ultimo osservando alla (7):

$$D(E_2) = D, \qquad D(E_3) = Y'(E_2) - 27\, Y'(E_3) = \frac{1}{16}\, Y\, D,$$

$$D(E) = Y_2(E_2) - 27\, Y'(E_3) = 729\,(Y_2 - 54\, Y^3)\, D.$$

Quest'ultima relazione è per le funzioni del quarto grado l'analoga alle (1) dell'Eisenstein per le forme di terzo grado.

Dalle equazioni:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_0} = \alpha_0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} = \alpha_1, \qquad \dots \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial a_n} = \alpha_n$$

si suppongono ricavati i valori di $a_0, a_1, \dots a_n$ in funzione di $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_n$; e, sostituiti questi valori nella φ, si avranno le

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_0}\frac{\partial \alpha_0}{\partial a_r} + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial a_r} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_n}\frac{\partial \alpha_n}{\partial a_r} = \alpha_r.$$

Da queste si ponno ricavare i valori di $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_0}, \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1}, \dots$, e si avrà per esempio:

$$\Delta \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_0} = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \frac{\partial \alpha_1}{\partial a_0} & \dots & \frac{\partial \alpha_n}{\partial a_0} \\ \alpha_1 & \frac{\partial \alpha_1}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial \alpha_n}{\partial a_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n & \frac{\partial \alpha_1}{\partial a_n} & \dots & \frac{\partial \alpha_n}{\partial a_n} \end{vmatrix},$$

essendo

$$\Delta = \sum \left(\pm \frac{\partial \alpha_0}{\partial a_0}\frac{\partial \alpha_1}{\partial a_1} \dots \frac{\partial \alpha_n}{\partial a_n} \right).$$

Osservando che $\frac{\partial \alpha_r}{\partial a_s} = \frac{\partial \alpha_s}{\partial a_r}$, l'equazione superiore si potrà porre sotto la forma:

$$(m-1)\Delta \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_0} = \begin{vmatrix} (m-1)\alpha_0 & \frac{\partial \alpha_0}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial \alpha_0}{\partial a_n} \\ (m-1)\alpha_1 & \frac{\partial \alpha_1}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial \alpha_1}{\partial a_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (m-1)\alpha_n & \frac{\partial \alpha_n}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial \alpha_n}{\partial a_n} \end{vmatrix};$$

e siccome si ha

$$a_0 \frac{\partial \alpha_s}{\partial a_0} + a_1 \frac{\partial \alpha_s}{\partial a_1} + \ldots + a_n \frac{\partial \alpha_s}{\partial a_n} = (m-1)\alpha_s ,$$

se nel determinante superiore agli elementi della prima colonna si aggiungono gli elementi delle altre ordinatamente moltiplicati per $-a_1, -a_2, \ldots -a_n$, si ottiene:

$$(m-1)\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_0} = a_0 ;$$

ed analogamente in generale:

$$(m-1)\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_s} = a_s .$$

Ne risulta che l'invariante di grado erresimo dell'evettante dell'invariante di grado erresimo di una funzione omogenea qualsivoglia (4) sarà esprimibile per mezzo di quest'ultimo invariante, cioè si avrà, secondo la notazione su adottata,

$$Y_r(E_r) = h\, Y_r^{r-1} ;$$

ponendo per brevità $\alpha_s = \dfrac{\partial Y_r}{\partial a_s}$, si avrà:

$$(r-1)\frac{\partial Y_r}{\partial \alpha_s} = a_s ,$$

e quindi

$$\frac{\partial Y_r(E_r)}{\partial \alpha_s} = h\, Y_r^{r-2} a_s .$$

Ciò appunto verificasi per l'evettante del discriminante della funzione omogenea del terzo grado, e dalla equazione

$$U = 16\, u^3$$

si ha:

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha_0} = 16\, u^2 a_0 , \quad \frac{\partial U}{\partial \alpha_1} = 16\, u^2 a_1 , \quad \frac{\partial U}{\partial \alpha_2} = 16\, u^2 a_2 , \quad \frac{\partial U}{\partial \alpha_3} = 16\, u^2 a_3 ,$$

le quali formole erano pure state date senza dimostrazione dal sig. EISENSTEIN.

Pavia, li 6 settembre 1854.

[G.].

XXIII.

INTORNO AD ALCUNE FORMOLE PER LA RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI ALGEBRICHE.

Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, [illegible]

Considero la equazione

$$F(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

e suppongo i coefficienti di essa funzioni di una variabile y. Sieno $x_1, x_2, \ldots x_n$ le radici di quella equazione; sostituita una di queste nella medesima, si derivi la risultante rispetto ad y; si avrà:

$$F'(x)\frac{dx}{dy} + F'(y) = 0,$$

essendo $F'(x)$ la derivata della funzione $F(x)$ rispetto ad x, ed $F'(y)$ la derivata della funzione stessa rispetto ad y, avendo riguardo alla sola variabilità dei coefficienti. Ora è noto *) che, indicando con Δ il determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

si ha

$$\frac{1}{F'(x)} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial x^{n-1}};$$

*) Vedi il mio opuscolo: « *La teorica dei determinanti* », ecc., Pavia, 1854 (pag. 74).

e siccome

$$\Delta^2 = D = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

e

$$\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x_{n-1}}\right)^2 = Q = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-2} & 1 \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-2} & s_{n-1} & \dots & s_{2n-4} & x^{n-2} \\ 1 & x & \dots & x^{n-2} & 1 \end{vmatrix},$$

sostituendo si ottiene la

$$\frac{dx}{dy}\sqrt{D} + F'(y)\sqrt{Q} = 0.$$

Da questa formola, allorquando si suppongono i coefficienti della $F(x) = 0$ essere funzioni lineari intere della variabile y, si deduce facilmente l'importante teorema sulla risoluzione analitica delle equazioni algebriche, che il distinto prof. BETTI pubblicava nel fascicolo di gennaio di questi Annali [t. V (1854), p. 10]. Infatti, supposto

$$F(x) = \varphi(x) + y\psi(x),$$

si avrà:

$$\frac{dx}{dy}\sqrt{D} + \psi(x)\sqrt{Q} = 0,$$

ed il polinomio Q riducesi ad una funzione algebrica razionale della sola variabile x, ponendo in esso per y il suo valore $-\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$. Il teorema si presenta qui sotto una forma più comoda nelle applicazioni di quella del BETTI. Sceglieremo ad esempio il medesimo riportato da quell'autore. Sia

$$F(x) = x^5 + 5x^3 - y.$$

Si ha

$$D = 5^5 \cdot y^2(y^2 + 108),$$

$$Q = 5^4(12x^6 - 4x^5y + 120x^4 - 28x^3y + x^2y^2 + 300x^2 - 40xy + 8y^2);$$

ossia, ponendo in luogo di y il binomio $x^5 + 5x^3$, si ha

$$Q = 5^4 \cdot x^2(x^2 + 5)^2(x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 12),$$

per cui

$$5\frac{dx}{dy}y\sqrt{y^2 + 108} = x(x^2 + 5)\sqrt{x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 12}.$$

anche per l'equazione seguente, la quale non è che la (1) sotto altra forma:

$$s_i \frac{\partial x}{\partial s_1} + 2 s_{i+1} \frac{\partial x}{\partial s_2} + \dots + n s_{i+n-1} \frac{\partial x}{\partial s_n} = x^i.$$

La primitiva della (1), nella quale siasi fatto $i = 0$, è la

$$x = -\frac{a_1}{n} + \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{n-1}), \tag{2}$$

nella quale, come si è veduto nella Nota citata, le $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{n-1}$ sono i coefficienti dell'equazione che si ottiene facendo sparire il secondo termine della $F(x) = 0$; infatti si ha:

$$\alpha_r = a_{r+1} - (n-r) a_r \frac{a_1}{n} + \frac{(n-r)(n-r+1)}{1 \cdot 2} a_{r-1} \frac{a_1^2}{n^2} + \dots$$

$$\dots - (-1)^{r-1} \frac{(n-r)(n-r+1) \dots (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (r-1)} a_2 \frac{a_1^{r-1}}{n^{r-1}}$$

$$+ (-1)^r r \frac{(n-r)(n-r+1) \dots (n-1) n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (r+1)} \cdot \frac{a_1^{r+1}}{n^{r+1}}.$$

Osserviamo che la quantità α_r è omogenea in indice dell'ordine $r + 1$ rispetto ad $a_1, a_2, \dots a_{r+1}$, quindi si avrà:

$$a_1 \frac{\partial \alpha_r}{\partial a_1} + 2 a_2 \frac{\partial \alpha_r}{\partial a_2} + \dots + (r+1) a_{r+1} \frac{\partial \alpha_r}{\partial a_{r+1}} = (r+1) \alpha_r.$$

Mediante queste e le analoghe equazioni trasformasi facilmente quella che si ottiene dalla (1) ponendo $i = 1$, cioè la

$$a_1 \frac{\partial x}{\partial a_1} + 2 a_2 \frac{\partial x}{\partial a_2} + \dots + n a_n \frac{\partial x}{\partial a_n} = x,$$

e si ha

$$2 \alpha_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} + 3 \alpha_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2} + \dots + n \alpha_{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_{n-1}} = \varphi,$$

dalla quale:

$$\varphi = \psi(\beta_1, \beta_2, \dots \beta_{n-2}) \sqrt{\alpha_1}, \tag{3}$$

essendo ψ il simbolo di una funzione arbitraria e

$$\beta_r = \frac{\alpha_{r+1}^2}{\alpha_1^{r+2}}.$$

Le $\sqrt{\beta_1}$, $\sqrt{\beta_2}$, ecc. sono i coefficienti dell'equazione che si ottiene facendo sparire il secondo

XXIV.

INTORNO AD ALCUNE QUISTIONI DELLA GEOMETRIA DI POSIZIONE.

Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, tomo VI [illegible]

1. Sieno $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ le equazioni di tre rette; una conica inscritta nel triangolo determinato da esse potrà rappresentarsi colla equazione:

$$\varphi = u^2 + v^2 + w^2 - 2\,v\,w - 2\,u\,w - 2\,u\,v = 0 .$$

Supponiamo

$$u = a_1 r + b_1 s + c_1 t ,$$

$$v = a_2 r + b_2 s + c_2 t ,$$

$$w = a_3 r + b_3 s + c_3 t ,$$

e si determinino i coefficienti a_1, b_1, ... in modo che per questa sostituzione lineare la forma quadratica φ venga trasformata in sè stessa, cioè si abbia

$$\varphi = r^2 + s^2 + t^2 - 2\,t\,s - 2\,t\,r - 2\,r\,s .$$

È evidente che in questa condizione il triangolo determinato dalle rette $r = 0$, $s = 0$, $t = 0$ sarà circoscritto alla conica $\varphi = 0$, e che le equazioni:

$$(1)\qquad \left\{ \begin{array}{l} a_1 r + b_1 s + c_1 t = 0 , \\ a_2 r + b_2 s + c_2 t = 0 , \\ a_3 r + b_3 s + c_3 t = 0 \end{array} \right.$$

saranno quelle dei lati di uno qualunque degli infiniti triangoli circoscrivibili a quella conica. Ora, indicando con λ, μ, ν tre quantità arbitrarie, e ponendo

$$1+\mu-\nu=l_1, \qquad -(\nu+\lambda)=l_2, \qquad \lambda+\mu=l_3,$$

$$\mu+\nu=m_1, \qquad 1+\nu-\lambda=m_2, \qquad -(\lambda+\mu)=m_3,$$

$$-(\mu+\nu)=n_1, \qquad \nu+\lambda=n_2, \qquad 1+\lambda-\mu=n_3,$$

e

$$\Delta=\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}=1+4(\lambda\mu+\lambda\nu+\mu\nu),$$

i valori dei coefficienti a_1, b_1, ..., i quali rendono soddisfatta la condizione suddetta, sono, come è noto *),

$$\Delta a_1=2\frac{\partial\Delta}{\partial l_1}-\Delta, \qquad \Delta b_1=2\frac{\partial\Delta}{\partial l_2}, \qquad \Delta c_1=2\frac{\partial\Delta}{\partial l_3}, \qquad \ldots,$$

quindi le equazioni (1) assumono la forma:

$$(2)\quad \begin{cases} \Delta u=-(2\mu-1)(2\nu+1)r+2(2\mu-1)(\mu+\nu)s+2(2\nu+1)(\mu+\nu)t=0, \\ \Delta v=2(2\lambda+1)(\lambda+\nu)r-(2\nu-1)(2\lambda+1)s+2(2\nu-1)(\nu+\lambda)t=0, \\ \Delta w=2(2\lambda-1)(\mu+\lambda)r+2(2\mu+1)(\lambda+\mu)s-(2\lambda-1)(2\mu+1)t=0. \end{cases}$$

2. Le equazioni delle rette, che in un triangolo qualunque $(u\,v\,w)$ uniscono i vertici degli angoli ai punti di contatto della conica coi rispettivi lati opposti, sono le

$$v-w=0, \qquad w-u=0, \qquad u-v=0.$$

Quelle tre rette si segano, come è noto, in un punto, il quale sarà determinato dalle equazioni:

$$\frac{r}{\mu_1+\nu_1}=\frac{s}{\nu_1+\lambda_1}=\frac{t}{\lambda_1+\mu_1},$$

essendo

$$\mu_1-\nu_1=4k(\mu-\nu)-2(\nu-\lambda)+2(\lambda-\mu),$$

$$\nu_1-\lambda_1=2(\mu-\nu)+4k(\nu-\lambda)-2(\lambda-\mu),$$

$$\lambda_1-\mu_1=-2(\mu-\nu)+2(\nu-\lambda)+4k(\lambda-\mu)$$

---

*) HERMITE, *Sur la théorie des formes quadratiques ternaires indéfinies* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. XLVII (1854), p. 307]. — BRIOSCHI [XVI, pp. 105-109].

e
$$1 = \lambda + \mu + \nu.$$

A quali condizioni dovranno soddisfare le λ, μ, ν perchè gli infiniti analoghi punti corrispondenti agli infiniti triangoli circoscrivibili alla conica $\varphi = 0$ si confondano in un sol punto?

Pel triangolo $(r\,s\,t)$ il punto di comune intersezione viene dato dalle equazioni:

$$r = s = t,$$

e quindi le λ, μ, ν dovranno soddisfare alle

$$\lambda_1 = \mu_1 = \nu_1;$$

ossia dovranno essere

(3)
$$\lambda = \mu = \nu.$$

Ora, osservando che una proprietà della trasformazione in sè stessa è la

$$\lambda u + \mu v + \nu w = \lambda r + \mu s + \nu t,$$

si otterrà per questo caso particolare:

(4)
$$u + v + w = r + s + t,$$

e quindi per le due forme della φ si avrà:

$$v w + u w + u v = s t + r t + r s;$$

ma

$$\psi = r s + r t + s t = 0$$

rappresenta l'equazione di una conica circoscritta al triangolo $(r\,s\,t)$; ne risulta che le equazioni (3) corrispondono geometricamente all'essere inscritti nella conica $\psi = 0$ gli infiniti triangoli circoscritti alla conica $\varphi = 0$.

Si noti che, immaginando il triangolo circoscritto alla conica $\psi = 0$ ed avente i punti di contatto ai vertici degli angoli del triangolo $(u\,v\,w)$, la retta sulla quale sono situati i punti di intersezione dei lati omologhi di essi triangoli è rappresentata dalla

$$u + v + w = 0;$$

quindi per l'equazione (4) tutti i punti di intersezione corrispondenti agli infiniti triangoli $(u\,v\,w)$ saranno situati sulla medesima retta:

$$r + s + t = 0.$$

Questi teoremi sono già noti e dimostrati da Sturm, Hearn, ecc.

3. Considerando il triangolo $(r\,s\,t)$ ed un triangolo qualsivoglia $(u\,v\,w)$, si otterrà

un esagono $(a\,b\,c\,d\,e\,f)$ circoscritto alla conica $\varphi = 0$. Siano: a, b i punti di intersezione della retta $t = 0$ colle $v = 0$, $u = 0$; c, d, e, f quelli di intersezione della $s = 0$ colle $u = 0$, $w = 0$ e della $r = 0$ colle $w = 0$, $v = 0$; le equazioni delle diagonali $(a\,d)$, $(b\,e)$, $(c\,f)$ saranno rispettivamente:

$$2(\lambda + \nu)(\lambda + \mu)r - (2\nu - 1)(\lambda + \mu)s - (2\mu + 1)(\lambda + \nu)\,t = 0,$$

$$-(2\nu + 1)(\lambda + \mu)r + 2(\mu + \nu)(\lambda + \mu)s - (2\lambda - 1)(\nu + \mu)t = 0,$$

$$-(2\mu - 1)(\nu + \lambda)r - (2\lambda + 1)(\mu + \nu)s + 2(\lambda + \nu)(\nu + \mu)t = 0.$$

Queste tre rette si segano, come è noto, in un punto, il quale sarà determinato dalle equazioni:

$$\frac{r}{\mu + \nu} = \frac{s}{\nu + \lambda} = \frac{t}{\lambda + \mu};$$

per conseguenza:

Teorema I. — *Se i triangoli $(u\,v\,w)$, e quindi l'$(r\,s\,t)$, circoscritti alla conica $\varphi = 0$, sono anche inscritti in una medesima conica, i punti di intersezione delle diagonali degli infiniti esagoni corrispondenti agli infiniti triangoli $(u\,v\,w)$ coincideranno.*

4. I punti di contatto del triangolo $(r\,s\,t)$ e di un triangolo $(u\,v\,w)$ colla conica $\varphi = 0$ determinano un esagono (123456) inscritto nella medesima, essendo 1, 3, 5 i punti di contatto dei lati $t = 0$, $s = 0$, $r = 0$, e 2, 4, 6 quelli delle rette $u = 0$, $w = 0$, $v = 0$. Le equazioni dei lati (12), (23), ... di questo esagono sono:

$$(34)\quad (2\lambda - 1)\,T - 2(2\mu + 1)s = 0, \qquad (61)\quad (2\lambda + 1)\,S - 2(2\nu - 1)t = 0,$$

$$(12)\quad (2\mu - 1)\,R - 2(2\nu + 1)t = 0, \qquad (45)\quad (2\mu + 1)\,T - 2(2\lambda - 1)r = 0,$$

$$(56)\quad (2\nu - 1)\,S - 2(2\lambda + 1)r = 0, \qquad (23)\quad (2\nu + 1)\,R - 2(2\mu - 1)s = 0,$$

essendo

$$R = r - s - t, \qquad S = -r + s - t, \qquad T = -r - s + t.$$

Ora, se si indicano con $l = 0$, $m = 0$, $n = 0$ le equazioni dei lati (34), (12), (56), si otterranno quali equazioni dei lati (61), (45), (23) ordinatamente le

$$-a\,l + \beta\,m + \gamma\,n = 0,$$

$$\alpha\,l - b\,m + \gamma\,n = 0,$$

$$\alpha\,l + \beta\,m - c\,n = 0,$$

nelle quali si è posto:

$$a = 2\lambda + 1, \qquad b = 2\mu + 1, \qquad c = 2\nu + 1,$$
$$\alpha = 2(\mu + \nu), \qquad \beta = 2(\nu + \lambda), \qquad \gamma = 2(\lambda + \mu).$$

Le comuni intersezioni dei lati opposti dell'esagono

$$(123456)$$

sono situati sulla retta rappresentata dall'equazione

$$\omega_1 = \alpha l + \beta m + \gamma n = 0;$$

così quelle dei lati opposti dell'esagono (143652) sulla retta

$$\theta_1 = a l + b m + c n = 0,$$

e quelle dei lati opposti dell'esagono (163254) sulla retta

$$(\alpha - a) l + (\beta - b) m + (\gamma - c) n = 0.$$

Queste tre rette concorrono, come è noto, ad uno stesso punto.

Se supponesi $\lambda = \mu = \nu$, si hanno le

$$a = b = c, \qquad \alpha = \beta = \gamma;$$

quindi le tre rette superiori coincidono colla

$$l + m + n = 0,$$

la quale, in questa ipotesi, equivale alla

$$r + s + t = 0.$$

Siamo così condotti ai seguenti:

Teorema II. — *Se i vertici degli angoli dei due triangoli determinati dalle tangenti a sei punti di una conica non consecutivi nè opposti* (1, 3, 5; 4, 2, 6) *sono situati sopra una seconda conica, le tre rette di* Pascal *corrispondenti alla permutazione* $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ *coincidono.*

Teorema III. — *Se supponiamo che uno di questi triangoli, per es. il secondo, si muova mantenendosi circoscritto alla prima conica ed inscritto nella seconda, ed indichiamo con* y, x, z *i punti di contatto per una posizione qualsivoglia, tutte le rette di* Pascal *corrispondenti alla permutazione* $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ x & y & z \end{pmatrix}$ *si confondono in una sola retta.*

Questo teorema comprende evidentemente il secondo.

Considero le rette di Pascal corrispondenti alle permutazioni (236), (146), (245);

le equazioni di queste rette sono:

$$
\begin{aligned}
&(243561) \quad \omega_2 - bc\omega_1 + l\alpha(\beta\gamma - bc) = 0,\\
&(213465) \quad \theta_2 - \beta\gamma\theta_1 + la(bc - \beta\gamma) = 0,\\
&(253164) \quad \omega_2 - \theta_2 = 0;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(134562) \quad \omega_3 = ac\omega_1 + m\beta(\alpha\gamma - ac) = 0,\\
&(124365) \quad \theta_3 = \alpha\gamma\theta_1 + mb(ac - \alpha\gamma) = 0,\\
&(154263) \quad \omega_3 - \theta_3 = 0;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(234651) \quad \omega_4 = ab\omega_1 + n\gamma(\alpha\beta - ab) = 0,\\
&(214356) \quad \theta_4 = \alpha\beta\theta_1 + nc(ab - \alpha\beta) = 0,\\
&(264153) \quad \omega_4 - \theta_4 = 0.
\end{aligned}
$$

I punti $(\omega_1\theta_1)$, $(\omega_2\theta_2)$, $(\omega_3\theta_3)$, $(\omega_4\theta_4)$ sono situati sopra una medesima retta; l'equazione di questa è

$$\alpha\beta\gamma\theta_1 + abc\omega_1 = 0.$$

Ora, se $\lambda = \mu = \nu$, questa equazione riducesi alla

$$l + m + n = r + s + t = 0;$$

quindi, ritenendo le denominazioni del Teorema III, si ha:

Teorema IV. — *La retta di* Steiner, *sulla quale sono situati i quattro punti corrispondenti alle permutazioni*

$$(135), \qquad (x3z), \qquad (1yz), \qquad (xy5),$$

rimane la stessa qualunque sieno i punti di contatto x, y, z.

È noto che le tre rette di Steiner corrispondenti alle permutazioni:

$$
(A) \qquad \left\{
\begin{array}{llll}
(135), & (236), & (146), & (245)\\
(135), & (634), & (124), & (625)\\
(135), & (432), & (162), & (465)
\end{array}
\right.
$$

concorrono ad un medesimo punto determinato dalla permutazione (135) o dalle rette $\omega_1 = \theta_1 = 0$. Ne risulta che nei dati del Teorema II si ha il

Teorema V. — *Le tre rette di* Steiner *corrispondenti alle permutazioni* (A) *coincidono colla retta nella quale si confondono le tre rette di* Pascal *corrispondenti alla permutazione* (135).

E nei dati del Teorema III si ha:

Teorema VI. — *Le rette di* Steiner *corrispondenti alle permutazioni:*

$$(135),\quad (x3z),\quad (1yz),\quad (xy5)$$

$$(135),\quad (z3y),\quad (1xy),\quad (zx5)$$

$$(135),\quad (y3x),\quad (1zx),\quad (yz5)$$

si confondono tutte in una medesima retta, qualunque sieno i punti x, y, z.

5. Si indichino con A, B, C, D, E, F i punti di intersezione dei lati non consecutivi nè opposti dell'esagono (123456), cioè dei lati $(12)(56)$, $(23)(61)$, $(34)(12)$, $(45)(23)$, $(56)(34)$, $(61)(45)$. Le equazioni delle diagonali AD, BE, CF sono rispettivamente:

$$(b+\beta)\,m-(c+\gamma)\,n=0,$$

$$(c+\gamma)\,n-(a+\alpha)\,l=0,$$

$$(a+\alpha)\,l-(b+\beta)\,m=0.$$

Queste tre rette si segano quindi in un medesimo punto determinato dalle

$$l=m=n$$

e per conseguenza l'esagono $(ABCDEF)$ sarà circoscrivibile ad una conica. Le equazioni superiori equivalgono alle

$$\frac{r}{\eta+\zeta}=\frac{s}{\zeta+\xi}=\frac{t}{\xi+\eta},$$

essendosi posto

$$\xi=4\lambda k+2\nu-2\mu+1,\qquad \eta=4\mu k+2\lambda-2\nu+1,$$

$$\zeta=4\nu k+2\mu-2\lambda+1,\qquad k=\lambda+\mu-\nu;$$

quindi, pel caso di $\lambda=\mu=\nu$ il punto di intersezione di quelle diagonali verrà dato dalle $r=s=t$. Ne risulta il

Teorema VII. — *I punti di intersezione dei lati non consecutivi nè opposti di ciascuno degli esagoni inscritti* $(1x3y5z)$ *determinano altrettanti esagoni circoscrivibili ad una medesima conica; i punti di comune intersezione delle diagonali di ciascuno di questi esagoni coincidono.*

Si suppongano uniti i vertici degli angoli non consecutivi nè opposti dell'esagono circoscritto $(abcdef)$; si otterrà un altro esagono, pel quale avrà luogo la proprietà che le comuni intersezioni dei lati opposti sono situati sulla retta rappresentata dall'equazione:

$$\xi r+\eta s+\zeta t=0,$$

cioè sulla polare del punto (5) rispetto alla conica $\varphi = 0$ *). Dunque questo esagono sarà inscrivibile in una conica; e siccome pel caso di $\lambda = \mu = \nu$ la equazione di quella polare diventa

$$r + s + t = 0,$$

si ha:

TEOREMA VIII. — *Le rette che uniscono i vertici degli angoli non consecutivi nè opposti di ciascuno degli esagoni circoscritti* $(a\,b\,c\,d\,e\,f)$ *determinano altrettanti esagoni inscrivibili in una stessa conica; le rette di* PASCAL *per ognuno di questi esagoni coincidono.*

OSSERVAZIONE. — Ponendo

$$\lambda_1 = \mu\zeta - \eta\nu, \qquad \mu_1 = \nu\xi - \lambda\zeta, \qquad \nu_1 = \lambda\eta - \mu\xi,$$

il punto di intersezione delle rette di PASCAL corrispondenti all'esagono (123456) ed all'esagono che si ottiene unendo i vertici degli angoli non consecutivi nè opposti dell'$(a\,b\,c\,d\,e\,f)$ sarà determinato dalle

$$\frac{r}{\lambda_1} = \frac{s}{\mu_1} = \frac{t}{\nu_1},$$

e la retta che unisce i punti di intersezione delle diagonali di ciascuno degli esagoni $(a\,b\,c\,d\,e\,f)$, $(A\,B\,C\,D\,E\,F)$ ha per equazione:

$$\lambda_1 R + \mu_1 S + \nu_1 T = 0,$$

cioè sarà la polare di quel punto rispetto alla conica. Nel caso di $\lambda = \mu = \nu$ tanto quelle due rette, quanto i due punti, coincidono.

Pavia, li 20 gennajo 1855.

[G.].

*) Nouvelles Annales de Mathématiques, t. XI (1852), p. 174.

XXV.

INTORNO AD ALCUNE PROPRIETÀ DELLE SUPERFICIE DEL TERZO ORDINE.

Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, [illegible] VI [illegible]

In una superficie del terzo ordine esistono, in generale, 27 rette. Il sig. CAYLEY ha dimostrato che vi sono delle terne di rette situate in un piano (da quell'autore chiamato triplo-tangente), e che per una qualunque delle 27 rette della superficie passano cinque piani triplo-tangenti. Quindi sarà quarantacinque il numero dei piani triplo-tangenti. Il sig. HART ha proposto una notazione assai conveniente per indicare le 27 rette ed i 45 piani. Le rette sono rappresentate dalle 27 lettere:

$$A_1,\ B_1,\ C_1;\quad A_2,\ B_2,\ C_2;\quad A_3,\ B_3,\ C_3$$

$$a_1,\ b_1,\ c_1;\quad a_2,\ b_2,\ c_2;\quad a_3,\ b_3,\ c_3$$

$$\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1;\quad \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2;\quad \alpha_3,\ \beta_3,\ \gamma_3$$

ed i piani sono rappresentati dal complesso delle tre lettere che dinotano le rette che sono situate in quel piano. Dieciotto fra questi piani risultano dall'unire in ciascuna linea orizzontale tre lettere eguali ma di indici differenti, oppure tre lettere differenti ma di indici eguali. Come, per es., dalla prima linea si hanno i sei piani

$$(A_1 A_2 A_3),\quad (B_1 B_2 B_3),\quad (C_1 C_2 C_3),\quad (A_1 B_1 C_1),\quad (A_2 B_2 C_2),\quad (A_3 B_3 C_3),$$

così dodici se ne hanno dalle altre due.

Gli altri ventisette piani sono dati dalla tabella:

$A_1 a_1 \alpha_1$	$B_1 b_1 \beta_1$	$C_1 c_1 \gamma_1$
$b_2 \beta_2$	$c_2 \gamma_2$	$a_2 \alpha_2$
$c_3 \gamma_3$	$a_3 \alpha_3$	$b_3 \beta_3$
$A_2 c_2 \beta_3$	$B_2 a_2 \gamma_3$	$C_2 b_2 \alpha_3$
$a_3 \gamma_1$	$b_3 \alpha_1$	$c_3 \beta_1$
$b_1 \alpha_2$	$c_1 \beta_2$	$a_1 \gamma_2$
$A_3 b_3 \gamma_2$	$B_3 c_3 \alpha_2$	$C_3 a_3 \beta_2$
$c_1 \alpha_3$	$a_1 \beta_3$	$b_1 \gamma_3$
$a_2 \beta_1$	$b_2 \gamma_1$	$c_2 \alpha_1$

Osservando alle posizioni rispettive di quelle rette e di quei piani, si riscontrano facilmente le seguenti proprietà, alcune delle quali sussistono per un sistema qualsivoglia di 27 rette e 45 piani nelle condizioni superiori.

1. Considerando due rette che non si segano, se ne trovano altre dieci che non segano nè l'una nè l'altra, e cinque altre che le segano; e considerando due rette che si segano, se ne trovano otto che non le segano, ed una che interseca l'una e l'altra.

2. Ogni retta, per es. A_1, è segata da dieci altre, e quindi non incontrata dalle altre sedici. Ciascuna di queste sedici è intersecata da cinque delle dieci rette seganti A_1 (n° 1); e quindi anche da cinque altre delle medesime sedici. Ne risulta che combinando due a due quelle sedici rette si formeranno 40 coppie di rette che si segano, ed 80 coppie di rette che non si segano; e per conseguenza sarà 80 il numero delle terne di rette che hanno la proprietà di non segarsi l'un l'altra, ed in ciascuna delle quali terne entra una stessa retta A_1.

3. Per quanto si è detto sopra (n° 2) saranno 135 le coppie di rette le quali si segano l'un l'altra, e 216 il numero delle coppie di rette che non si segano. Per conseguenza (n° 1) sarà $\frac{216.10}{3} = 720$ il numero totale delle terne composte di rette che non si segano l'un l'altra.

4. Tre rette qualsivogliano che non si segano, sono intersecate, ciascuna da cia-

scuna, da altre tre rette che pure non si segano (proprietà già enunciata dal CAYLEY). Per es., ciascuna delle tre rette α_1 β_3 γ_2, due qualunque delle quali non si segano, è segata da ognuna delle a_1, b_3, c_2, delle quali due qualunque non si segano. Queste due terne di rette (che chiameremo rette *conjugate*) saranno quindi situate sopra una iperboloide ad una falda. Si avranno (n° 3) 360 coppie di terne conjugate.

Ogni coppia di terne conjugate dà origine a tre esagoni, in ciascuno dei quali i lati opposti si incontrano. Questi esagoni si chiameranno *conjugati*. Per es., considerando la coppia superiore di terne conjugate, saranno esagoni conjugati i seguenti:

$$(a_1\alpha_1 b_3\beta_3 c_2\gamma_2),$$

$$(a_1\beta_3 b_3\gamma_2 c_2\alpha_1),$$

$$(a_1\gamma_2 b_3\alpha_1 c_2\beta_3).$$

5. Considerando tre rette qualsivogliano che non si segano, se ne trovano altre sei ciascuna delle quali non sega alcuna delle prime tre. Queste sei rette si distinguono in due gruppi composti di tre rette, ed aventi la proprietà che due rette qualunque in ciascun gruppo non si incontrano. Questi due gruppi si chiameranno *opposti* alla prima terna. Per es., le rette α_1, β_3, γ_2 non sono segate dalle sei rette b_1, c_3, a_2, b_2, a_3, c_1. Queste sei rette si distinguono nei due gruppi a_2, b_1, c_3 e a_3, b_2, c_1, in ciascuno dei quali due rette qualunque non si segano. I gruppi opposti a due terne di rette conjugate sono rispettivamente terne di rette conjugate. Si avranno così tre coppie di terne di rette conjugate le quali formeranno tre esagoni che chiameremo *opposti*. Per es., considerando le due terne di rette conjugate:

$$\alpha_1, \beta_3, \gamma_2; \qquad a_1, b_3, c_2,$$

si hanno ordinatamente i gruppi opposti:

$$a_2, b_1, c_3; \qquad \alpha_2, \beta_1, \gamma_3,$$

$$a_3, b_2, c_1; \qquad \alpha_3, \beta_2, \gamma_1,$$

i quali costituiscono due coppie di terne di rette conjugate. Ed in questo esempio i tre esagoni opposti sarebbero:

$$(a_1\alpha_1 b_3\beta_3 c_2\gamma_2),$$

$$(a_2\alpha_2 b_1\beta_1 c_3\gamma_3),$$

$$(a_3\alpha_3 b_2\beta_2 c_1\gamma_1).$$

6. Indicando con T, U due terne di rette conjugate, e con T_1, U_1 i gruppi ri-

spettivamente opposti ad esse, i quali costituiscano due terne di rette pure conjugate, si troverà che ciascuna delle rette della terna T sega due delle rette della terna U_1, e che ciascuna delle rette della terna U sega due della terna T_1. Ciò verificasi facilmente nell'esempio superiore (n° 5). È quindi evidente che da uno degli esagoni formati colle terne T, U si potrà ottenere un altro esagono sostituendo opportunamente ad una retta della terna T una retta della terna T_1; e ad una retta della terna U una retta della terna U_1. Questo esagono si chiamerà *derivato* dal primo rispetto alle terne T_1, U_1; ed è chiaro che un esagono qualsivoglia avrà tre esagoni derivati rispetto a due terne conjugate. Per es., l'esagono $(a_1 \alpha_1 b_3 \beta_3 c_2 \gamma_2)$ avrà rispetto alle terne conjugate α_2, β_1, γ_3; a_2, b_1, c_3 i seguenti esagoni derivati:

$$(a_1 \alpha_1 \beta_1 \beta_3 c_2 a_2),$$

$$(a_1 b_1 b_3 \beta_3 \gamma_3 \gamma_2),$$

$$(\alpha_2 \alpha_1 b_3 c_3 c_2 \gamma_2).$$

Analogamente, i due esagoni conjugati dell'esagono

$$(a_1 \alpha_3 b_2 \beta_3 c_1 \gamma_1)$$

avranno per esagoni derivati rispetto alle medesime terne i seguenti:

$$(a_1 b_1 b_3 \gamma_2 \alpha_2 \alpha_1), \qquad (\gamma_1 \gamma_2 b_1 c_3 c_2 \beta_1),$$

$$(\beta_2 \beta_3 b_1 c_3 c_2 \alpha_2), \qquad (a_1 \gamma_1 \alpha_2 \alpha_1 c_1 a_2),$$

$$(a_3 \beta_3 \gamma_3 \gamma_1 c_2 a_2), \qquad (a_1 b_1 b_3 \alpha_2 \beta_1 \beta_2).$$

Questi nove esagoni sono distribuiti in modo che negli esagoni che si trovano nella medesima linea in ciascuna colonna vi sieno sostituite opportunamente tutte le rette delle due terne α_2, β_1, γ_3 ed a_2, b_1, c_3 rispetto alle quali si fa la derivazione. I tre esagoni che in ciascuna colonna occupano la stessa linea si diranno *conjugati-derivati*, ed i nove esagoni costituiranno tre terne di esagoni conjugati-derivati corrispondenti.

Così, i nove esagoni derivati rispetto alle terne

$$\alpha_3, \beta_2, \gamma_1; \qquad a_3, b_2, c_1,$$

i quali compiono il numero degli esagoni derivati che ammettono l'esagono $(a_1 \alpha_1 b_3 \beta_3 c_2 \gamma_2)$ ed i suoi conjugati, sono i seguenti:

$$(a_1 \alpha_3 \alpha_1 \beta_1 c_2 c_1), \qquad (a_3 a_1 b_1 \gamma_1 \gamma_2 \alpha_1), \qquad (\beta_2 \gamma_1 b_1 b_2 c_2 \beta_3),$$

$$(a_3 a_1 b_3 \beta_2 \beta_3 \gamma_1), \qquad (\alpha_1 \beta_2 b_3 b_2 c_1 \alpha_3), \qquad (a_1 \gamma_1 \gamma_3 \alpha_3 c_2 c_1),$$

$$(\gamma_1 \alpha_3 b_3 b_2 c_1 \gamma_2), \qquad (a_1 \beta_2 \beta_3 \gamma_1 c_1 c_2), \qquad (a_3 a_1 b_1 \alpha_1 \alpha_3 \beta_3).$$

Questi esagoni sono disposti in modo che tre di essi posti in una medesima linea sono conjugati-derivati.

7. Quattro rette, due qualsivogliano delle quali non si segano, sono incontrate da due altre rette che pure non si segano e da nessun'altra retta.

8. Cinque rette, due qualsivogliano delle quali non si segano, sono tutte incontrate da una sola retta.

9. Sei rette, due qualunque delle quali non si segano, non sono tutte incontrate da alcuna delle altre rette.

10. Considerando uno qualsivoglia degli esagoni di cui si è detto al n° 4, chiameremo piani *opposti* in quell'esagono i piani determinati, l'uno da due lati contigui, e l'altro da quelli rispettivamente opposti. Questi piani saranno evidentemente fra i quarantacinque tripli-tangenti. Ciò posto si ha:

TEOREMA I. — *Le tre rette comuni intersezioni delle tre coppie di piani opposti in un esagono sono situate in uno stesso piano.*

Per es., considerando l'esagono $(a_1 \alpha_1 b_3 \beta_3 c_2 \gamma_2)$ le tre coppie di piani opposti sono:

$$(A_1 a_1 \alpha_1)(A_2 \beta_3 c_2), \qquad (B_3 \alpha_1 b_3)(B_2 c_2 \gamma_2), \qquad (C_3 b_3 \beta_3)(C_1 a_1 \gamma_2)$$

e le tre rette intersezioni di ciascuna di queste coppie di piani sono situate in uno stesso piano P.

TEOREMA II. — *I tre piani P corrispondenti a tre esagoni conjugati passano per una stessa retta L.*

TEOREMA III. — *I tre piani P corrispondenti a tre esagoni conjugati-derivati passano per una medesima retta l.*

TEOREMA IV. — *Le tre rette l determinate da tre terne di esagoni conjugati-derivati corrispondenti sono situate in uno stesso piano p. Questo piano contiene anche la retta L corrispondente ai tre esagoni conjugati da cui derivansi le tre suddette terne di esagoni.*

Quindi ad ognuno degli esagoni di cui si è detto al n° 4 corrispondono 21 piani P, una retta L, sei rette l e due piani p. I due piani p si segano evidentemente nella retta L.

Pavia, maggio 1855.

[Pi.].

XXVI.

SULLE COSTRUZIONI DEL SIG. CHASLES PER LE LINEE DEL TERZO E QUARTO ORDINE.

Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, tomo VI ([illegible]

LEMMA. — Il rapporto anarmonico ρ del fascio di rette

$$l_1 = 0, \qquad l_2 = 0, \qquad l_2 + s\,l_1 = 0, \qquad l_1 + r\,l_2 = 0$$

è dato dall'equazione:

$$\rho = \frac{s}{r}.$$

Supponendo che il rapporto anarmonico delle quattro rette superiori sia eguale a quello delle quattro seguenti:

$$l' = 0, \qquad l'' = 0, \qquad l'' + \sigma\,l' = 0, \qquad l' + \rho\,l'' = 0,$$

si avrà

$$\frac{s}{r} = \frac{\sigma}{\rho},$$

e quindi

$$\frac{\sigma}{s} = \frac{\rho}{r} = a,$$

essendo a una costante.

Le rette

$$l_1 + r\,l_2 = 0, \qquad l' + a\,r\,l'' = 0$$

vengono chiamate rette corrispondenti.

TEOREMA I. *Il luogo geometrico dei punti di intersezione delle rette corrispondenti di due fasci omografici è una conica.*

Infatti, le equazioni

$$l_1 + r l_2 = 0, \qquad l' + a r l'' = 0$$

rappresentano due rette corrispondenti dei due fasci omografici; eliminando da esse la r si ottiene:

$$l_2 l' - a l_1 l'' = 0,$$

la quale rappresenta il luogo geometrico richiesto, ed è l'equazione di una conica. Questa conica passa evidentemente pei centri dei due fasci.

LEMMA. — Se $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ sono le equazioni di due coniche, sarà $C_1 + r C_2 = 0$ quella di una conica che passa pei quattro punti di intersezione delle prime due. E se $l_1 = 0$, $l_2 = 0$ sono le equazioni delle polari di un punto rispetto alle prime due coniche, sarà $l_1 + r l_2 = 0$ l'equazione della polare del medesimo punto rispetto alla terza conica.

La conica $C_1 + r C_2 = 0$ e la retta $l' + a r l'' = 0$ si chiameranno corrispondenti.

TEOREMA II. — *Il luogo geometrico dei punti di intersezione di un fascio di coniche passanti pei medesimi quattro punti e delle rette corrispondenti ad esse è una linea del terzo ordine.*

Infatti, eliminando la r dalle equazioni:

$$C_1 + r C_2 = 0, \qquad l' + a r l'' = 0,$$

si ottiene la

$$C_2 l' - a C_1 l'' = 0,$$

la quale rappresenta il luogo richiesto, ed è evidentemente l'equazione di una linea del terzo ordine. Questa linea passa pei quattro punti di intersezione delle coniche e pel centro del fascio di rette corrispondenti *).

LEMMA. — Se le rette rappresentate dalle equazioni:

$$l' = 0, \qquad l'' = 0, \qquad l' + \rho l'' = 0, \qquad \ldots$$

sono polari di un medesimo punto rispetto alle coniche

$$C' = 0, \qquad C'' = 0, \qquad C' + \rho C'' = 0, \qquad \ldots,$$

*) Il prof. BELLAVITIS ha esposto la costruzione dello CHASLES per le tritome in una memoria letta all'Istituto Veneto.

le coniche

$$C_1 + r C_2 = 0, \qquad C' + a r C'' = 0$$

si chiameranno corrispondenti.

Teorema III. — *Il luogo geometrico delle comuni intersezioni di due fasci di coniche, che si corrispondono, è una linea del quarto ordine, che passa per i quattro punti comuni alle coniche di un fascio e pei quattro punti comuni alle coniche dell'altro fascio.*

Infatti, eliminando r dalle equazioni superiori si ottiene:

$$C_2 C' - a C_1 C'' = 0,$$

quindi, ecc.

Pavia, maggio 1855

[Pi.].

XXVII.

INTORNO AD UNA PROPRIETÀ DELLE EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI DEL PRIMO ORDINE.

Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, [illegible]

Sia

$$a = \varphi(z, x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n) \qquad \left(p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}\right) \tag{1}$$

una equazione alle derivate parziali del primo ordine. Supponiamo che una primitiva completa di essa risulti dalla eliminazione delle $p_1, p_2, \ldots p_n$ dalla equazione medesima e dalle n seguenti:

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 = \varphi_1(z, x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n), \\ a_2 = \varphi_2(z, x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n = \varphi_n(z, x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n), \end{array}\right. \tag{2}$$

nelle quali $a_1, a_2, \ldots a_n$ indicano costanti. Ciò posto, se dalle $n + 1$ equazioni superiori si ricavano i valori di $z, p_1, p_2, \ldots p_n$, dovranno questi valori soddisfare alla equazione:

$$z' = p_1 x'_1 + p_2 x'_2 + \cdots + p_n x'_n,$$

cioè dovranno verificare le

$$\frac{\partial p_r}{\partial x_s} = \frac{\partial p_s}{\partial x_r}. \tag{3}$$

Reciprocamente, se si potranno determinare n equazioni analoghe alle (2), le quali insieme alla proposta diano per $p_1, p_2, \ldots p_n, z$ valori che soddisfino le (3), il risultato della eliminazione delle $p_1, p_2, \ldots p_n$ da queste n equazioni e dalla proposta sarà una primitiva completa dell'equazione stessa.

Si suppongano ricavati dalle equazioni (1), (2) i valori di $z, p_1, p_2, \ldots p_n$; sostituendo questi valori nelle equazioni stesse si avranno altrettante equazioni identiche, le quali derivate rispetto ad x_r dànno

$$b_{0,0}\, p_r + b_{0,1} \frac{\partial p_1}{\partial x_r} + \ldots + b_{0,n} \frac{\partial p_n}{\partial x_r} = - a_{0,r},$$

$$b_{1,0}\, p_r + b_{1,1} \frac{\partial p_1}{\partial x_r} + \ldots + b_{1,n} \frac{\partial p_n}{\partial x_r} = - a_{1,r},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_{n,0}\, p_r + b_{n,1} \frac{\partial p_1}{\partial x_r} + \ldots + b_{n,n} \frac{\partial p_n}{\partial x_r} = - a_{n,r},$$

essendosi posto

$$a_{s,r} = \frac{\partial a_s}{\partial x_r}, \quad b_{s,t} = \frac{\partial a_s}{\partial p_t}, \quad b_{s,0} = \frac{\partial a_s}{\partial z}.$$

Da queste equazioni, indicando con Δ il determinante

$$\sum (\pm b_{0,0}\, b_{1,1} \ldots b_{n,n})$$

e facendo

$$\beta_{s,t} = \frac{\partial \Delta}{\partial b_{s,t}},$$

si ottengono le

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} -\Delta p_r &= a_{0,r}\beta_{0,0} + a_{1,r}\beta_{1,0} + \ldots + a_{n,r}\beta_{n,0}, \\ -\Delta \frac{\partial p_1}{\partial x_r} &= a_{0,r}\beta_{0,1} + a_{1,r}\beta_{1,1} + \ldots + a_{n,r}\beta_{n,1}, \\ -\Delta \frac{\partial p_n}{\partial x_r} &= a_{0,r}\beta_{0,n} + a_{1,r}\beta_{1,n} + \ldots + a_{n,r}\beta_{n,n}, \end{aligned} \right.$$

e per la (3):

$$a_{0,s}\beta_{0,r} + \ldots + a_{n,s}\beta_{n,r} = a_{0,r}\beta_{0,s} + \ldots + a_{n,r}\beta_{n,s}.$$

Moltiplico ordinatamente la prima delle (4), e le equazioni che si ottengono da questa ultima facendo $s = 1, 2, \ldots n$, per $b_{s,0}, b_{s,1}, \ldots b_{s,n}$; si avrà:

$$(5) \qquad \Delta a_{s,r} = \beta_{0,r} \sum_1^n a_{0,t}\, b_{s,t} + \ldots + \beta_{n,r} \sum_1^n a_{n,t}\, b_{s,t} - \Delta p_r\, b_{s,0}.$$

Dalla prima delle (4) si ha anche:

$$-\lambda\sum_i [illegible] = [illegible]\sum_i [illegible] + \dots + [illegible]\sum_i [illegible];$$

quindi, moltiplicando per $b_{r,0}$, $b_{r,1}$, ... $b_{r,n}$ quest'ultima equazione e quelle che deduconsi dalla (5) ponendo $r = 1, 2, \dots n$, si ha:

$$(6)\qquad \sum_i\left(\frac{\partial a_r}{\partial x_i}\frac{\partial a_s}{\partial p_i}-\frac{\partial a_r}{\partial p_i}\frac{\partial a_s}{\partial x_i}\right)+\frac{\partial a_r}{\partial z}\sum_i p_i\frac{\partial a_s}{\partial p_i}-\frac{\partial a_s}{\partial z}\sum_i p_i\frac{\partial a_r}{\partial p_i}=0,$$

alla quale devono soddisfare le a_0, a_1, ... a_n. La ricerca delle a_1, a_2, ... a_n può farsi quindi dipendere dall'integrazione di n equazioni alle derivate parziali del primo ordine e lineari.

È manifesta l'analogia fra il primo membro dell'equazione (6) e le funzioni di Poisson, e quindi fra questo metodo di integrazione e quello già adottato dal signor Bertrand pei problemi della Dinamica. La proprietà dell'annullarsi delle funzioni di Poisson per dati sistemi di costanti, la quale è un caso particolare di quella contenuta nell'equazione (6), fu da me dimostrata in questi Annali nel 1853 *), dal professore Bertrand nella Nota VII alla terza edizione della *Meccanica analitica* e dal signor Donkin in una interessante memoria, di cui la prima parte trovasi pubblicata nelle « Philosophical Transactions » di Londra (1854, Parte I, p. 71). Ponendo nella (6) $s=0$, si avrà, per determinare a_r, ad integrare come nel metodo di Pfaff, il seguente sistema di equazioni alle derivate ordinarie:

$$R\frac{\partial x_1}{\partial z}=\frac{\partial\varphi}{\partial p_1},\qquad -R\frac{\partial p_1}{\partial z}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+p_1\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

$$R\frac{\partial x_2}{\partial z}=\frac{\partial\varphi}{\partial p_2},\qquad -R\frac{\partial p_2}{\partial z}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+p_2\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

. . . .

$$R\frac{\partial x_n}{\partial z}=\frac{\partial\varphi}{\partial p_n},\qquad -R\frac{\partial p_n}{\partial z}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}+p_n\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial z}=0,\qquad\qquad R=\sum_i p_i\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}.$$

Una primitiva di queste equazioni è, come è noto, la $\varphi=a_0$; indicando le altre $2n-1$ con

$$A_1=b_1,\qquad A_2=b_2,\qquad \dots\qquad A_{2n-1}=b_{2n-1},$$

*) [XIII, pp. 73-82].

si avrà:

$$a_1 = \psi_1(A_1, A_2, \ldots A_{2n+1}),$$

ed evidentemente saranno:

$$a_2 = \psi_2(A_1, A_2, \ldots A_{2n+1}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n = \psi_n(A_1, A_2, \ldots A_{2n+1});$$

risultato già ottenuto da Jacobi nella sua notissima Memoria: *Ueber die Reduction der Integration der partiellen Differentialgleichungen*, etc. [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. XVII (1837), p. 97].

Pavia, agosto 1855.

[C.].

nelle quali

$$A_{r,s} = \frac{\partial A}{\partial a_{r,s}} \quad *).$$

LEMMA II. — Ponendo

$$m_{r,s} = a_{1,r}\, a_{2,s} - a_{2,r}\, a_{1,s} + \dots + a_{2n-1,r}\, a_{2n,s} - a_{2n,r}\, a_{2n-1,s},$$

se le quantità $a_{r,s}$ soddisfano alle equazioni (1) si hanno anche le

$$m_{1,2} = m_{3,4} = \dots = m_{2n-1,2n} = t,$$

e le altre $m_{r,s}$ eguali a zero. Infatti, ponendo

$$b_{r,s} = l_{2,r}\, a_{1,s} - l_{1,r}\, a_{2,s} + \dots + l_{2n,r}\, a_{2n-1,s} - l_{2n-1,r}\, a_{2n,s},$$

si hanno in generale le

$$A\, m_{2r,s} = b_{1,s}\, A_{1,2r-1} + b_{2,s}\, A_{2,2r-1} + \dots + b_{2n,s}\, A_{2n,2r-1},$$

$$-A\, m_{2r-1,s} = b_{1,s}\, A_{1,2r} + b_{2,s}\, A_{2,2r} + \dots + b_{2n,s}\, A_{2n,2r}.$$

Indicando con $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$; $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n$ le $2n$ costanti di un problema di Dinamica, ed ammettendo per $q_1, q_2, \dots q_n$; $p_1, p_2, \dots p_n$ gli ordinarj significati, si hanno, come è noto, le equazioni:

$$(\alpha_r, \beta_r) = \sum_1^n \left(\frac{\partial \alpha_r}{\partial q_i} \frac{\partial \beta_r}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha_r}{\partial p_i} \frac{\partial \beta_r}{\partial q_i} \right) = 1,$$

$$(\alpha_r, \alpha_s) = 0, \qquad (\beta_r, \beta_s) = 0, \qquad (\alpha_r, \beta_s) = 0.$$

Poniamo

$$\frac{\partial \alpha_r}{\partial q_s} = a_{2r-1,2s-1}, \quad \frac{\partial \beta_r}{\partial q_s} = a_{2r,2s-1},$$

$$\frac{\partial \alpha_r}{\partial p_s} = a_{2r-1,2s}, \quad \frac{\partial \beta_r}{\partial p_s} = a_{2r,2s}.$$

Si avranno le equazioni:

$$l_{2r-1,2r} = (\alpha_r, \beta_r) = 1, \quad l_{2r-1,2s-1} = (\alpha_r, \alpha_s) = 0,$$

$$l_{2r,2s} = (\beta_r, \beta_s) = 0, \qquad l_{2r-1,2s} = (\alpha_r, \beta_s) = 0,$$

e quindi pel Lemma I:

$$A_{2r,2s} = a_{2r-1,2s-1}, \qquad A_{2r,2s-1} = -a_{2r-1,2s},$$

$$A_{2r-1,2s} = -a_{2r,2s-1}, \quad A_{2r-1,2s-1} = a_{2r,2s}.$$

---

*) BRIOSCHI, *Sur l'analogie entre une classe de déterminants d'ordre pair; et sur les déterminants binaires*. [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LII (1856), p. 133].

Ma per una proprietà dei determinanti delle funzioni si hanno le

$$A_{2s,2r} = \frac{\partial p_r}{\partial \beta_s}, \qquad A_{2s-1,2r} = \frac{\partial q_r}{\partial \beta_s},$$

$$A_{2s,2r-1} = \frac{\partial p_r}{\partial \alpha_s}, \qquad A_{2s-1,2r-1} = \frac{\partial q_r}{\partial \alpha_s};$$

quindi sostituendo si avranno le note formole *):

$$\frac{\partial p_r}{\partial \beta_s} = \frac{\partial \alpha_s}{\partial q_r}, \quad \frac{\partial q_r}{\partial \beta_s} = -\frac{\partial \alpha_s}{\partial p_r}, \quad \frac{\partial p_r}{\partial \alpha_s} = -\frac{\partial \beta_s}{\partial q_r}, \quad \frac{\partial q_r}{\partial \alpha_s} = \frac{\partial \beta_s}{\partial p_r}.$$

Applicando il secondo Lemma a questo caso si otterranno facilmente le seguenti relazioni:

$$m_{2s-1,2s} = \sum_1^n \left(\frac{\partial \alpha_s}{\partial q_i} \frac{\partial \beta_s}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha_s}{\partial p_i} \frac{\partial \beta_s}{\partial q_i} \right) = 1,$$

$$m_{2s-1,2r-1} = \sum_1^n \left(\frac{\partial \alpha_s}{\partial q_i} \frac{\partial \alpha_r}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha_s}{\partial p_i} \frac{\partial \alpha_r}{\partial q_i} \right) = 0,$$

$$m_{2s,2r} = \sum_1^n \left(\frac{\partial \beta_s}{\partial p_i} \frac{\partial \beta_r}{\partial q_i} - \frac{\partial \beta_s}{\partial q_i} \frac{\partial \beta_r}{\partial p_i} \right) = 0,$$

$$m_{2s-1,2r} = \sum_1^n \left(\frac{\partial \alpha_s}{\partial q_i} \frac{\partial \beta_r}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha_s}{\partial p_i} \frac{\partial \beta_r}{\partial q_i} \right) = 0,$$

le quali rappresentano una nuova proprietà degli integrali *conjugati* di un problema di Dinamica.

Pavia, agosto 1855.

[C.].

---

*) [XIII, pp. 73-82]. — Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Part I., v. 144 (1854), pag. 80.

XXIX.

SULLE FUNZIONI OMOGENEE DI TERZO GRADO A DUE INDETERMINATE.

Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, [illegible] V.I [illegible]

Considero la forma cubica:

$$f(x, y) = a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 y + 3 a_2 x y^2 + a_3 y^3.$$

Indico con φ il discriminante di essa, cioè

$$\varphi = 3 a_1^2 a_2^2 - 4 a_0 a_2^3 - 4 a_1^3 a_3 + 6 a_0 a_1 a_2 a_3 - a_0^2 a_3^2,$$

e posto

$$-\alpha_3 = \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial a_0}, \quad 3\alpha_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial a_1}, \quad -3\alpha_1 = -\frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial a_2}, \quad \alpha_0 = \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial a_3},$$

formo il covariante di terzo grado della $f(x, y)$, ossia

$$F(x, y) = \alpha_0 x^3 + 3 \alpha_1 x^2 y + 3 \alpha_2 x y^2 + \alpha_3 y^3.$$

Fra il discriminante φ della forma f ed il discriminante ψ della F ha luogo la nota relazione dell'EISENSTEIN:

$$\psi = \varphi^3;$$

essa però non è che conseguenza delle tre relazioni seguenti:

$$(1) \quad \alpha_1^2 - \alpha_0 \alpha_2 = \varphi(a_1^2 - a_0 a_2), \quad \alpha_0 \alpha_3 - \alpha_1 \alpha_2 = \varphi(a_0 a_3 - a_1 a_2), \quad \alpha_2^2 - \alpha_1 \alpha_3 = \varphi(a_2^2 - a_1 a_3);$$

dalla considerazione delle quali si deducono alcune proprietà che veniamo ad esporre in questa Nota.

Sieno x_1, x_2, x_3 le radici della equazione $f(x, 1) = 0$, ed y_1, y_2, y_3 quelle della $F(x, 1) = 0$. Pongansi per brevità le seguenti denominazioni:

$$A_1 = a_1^2 - a_0 a_2, \qquad A_2 = a_0 a_3 - a_1 a_2, \qquad A_3 = a_2^2 - a_1 a_3,$$

$$A' = \alpha_1^2 - \alpha_0 \alpha_2, \qquad A'' = \alpha_0 \alpha_3 - \alpha_1 \alpha_2, \qquad A''' = \alpha_2^2 - \alpha_1 \alpha_3,$$

e le

$$l_1 = (x_2 - x_3)^2, \qquad l_2 = (x_3 - x_1)^2, \qquad l_3 = (x_1 - x_2)^2,$$

$$m_1 = (x_2 - x_3)^2 x_1, \qquad m_2 = (x_3 - x_1)^2 x_2, \qquad m_3 = (x_1 - x_2)^2 x_3,$$

$$n_1 = (x_2 - x_3)^2 x_1^2, \qquad n_2 = (x_3 - x_1)^2 x_2^2, \qquad n_3 = (x_1 - x_2)^2 x_3^2;$$

assumendo le lettere λ, μ, ν coi rispettivi accenti per indicare le analoghe quantità formate colle y_1, y_2, y_3. Incomincio dal considerare il gruppo di equazioni:

$$(2) \quad \begin{cases} l_1 + l_2 + l_3 = \dfrac{18}{a_0^2} A_1, & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \dfrac{18}{\alpha_0^2} A', \\ l_1 l_2 + l_1 l_3 + l_2 l_3 = \dfrac{81}{a_0^4} A_1^2, & \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_2 \lambda_3 = \dfrac{81}{\alpha_0^4} A'^2, \\ l_1 l_2 l_3 = -\dfrac{27}{a_0^4} \varphi, & \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -\dfrac{27}{\alpha_0^4} \psi, \end{cases}$$

e dal formare mediante queste le due:

$$b_0 x^3 + 3 b_1 x^2 + 3 b_2 x + b_3 = 0,$$

$$\beta_0 x^3 + 3 \beta_1 x^2 + 3 \beta_2 x + \beta_3 = 0,$$

di cui le radici sieno le l_1, l_2, l_3; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Indicando con B_1, B_2, B_3 i binomj:

$$b_1^2 - b_0 b_2, \qquad b_0 b_3 - b_1 b_2, \qquad b_2^2 - b_1 b_3$$

e con B', B'', B''' gli analoghi binomj formati colle $\beta_0, \beta_1, \ldots$, si ottengono le

$$B_1 = \frac{9}{a_0^4} A_1^2, \qquad B_2 = \frac{27}{a_0^6} (6 A_1^3 - a_0^2 \varphi), \qquad B_3 = \frac{81}{a_0^8} A_1 (9 A_1^3 - 2 a_0^2 \varphi),$$

$$B' = \frac{9}{\alpha_0^4} A'^2, \qquad B'' = \frac{27}{\alpha_0^6} (6 A'^3 - \alpha_0^2 \psi), \qquad B''' = \frac{81}{\alpha_0^8} A' (9 A'^3 - 2 \alpha_0^2 \psi);$$

e quindi:

$$4 B_1 B_3 - B_2^2 = \frac{27^2}{a_0^{12}} (4 A_1^3 - a_0^2 \varphi) \varphi,$$

$$4 B' B''' - B''^2 = \frac{27^2}{\alpha_0^{12}} (4 A'^3 - \alpha_0^2 \psi) \psi;$$

le quali, per le (1) e per la

$$\alpha_0 \alpha_3 + a_1 a_2 \varphi + 2 A_1 A_2 A_3 = 0,$$

dànno le

$$a^4 \varphi^2 C_1 = \alpha_0^4 C',$$

$$a^{12} \varphi^6 (4 C_1 C_3 - C_2^2) = \alpha^{12} (4 C' C''' - C''^2);$$

e quindi

$$(5) \quad \begin{cases} a_0^4 \varphi^2 (m_2 - m_3)^2 = \alpha^4 (\mu_2 - \mu_3)^2, \\ a^4 \varphi^2 (m_3 - m_1)^2 = \alpha_0^4 (\mu_3 - \mu_1)^2, \\ a_0^4 \varphi^2 (m_1 - m_2)^2 = \alpha_0^4 (\mu_1 - \mu_2)^2. \end{cases}$$

Considerando da ultimo le equazioni:

$$(6) \quad \begin{cases} n_1 + n_2 + n_3 = \frac{18}{a_0} A', & \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = \frac{18}{\alpha_0^2} A''', \\ n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3 = \frac{81}{a_0^2} A'^2, & \nu_1 \nu_2 + \nu_1 \nu_3 + \nu_2 \nu_3 = \frac{81}{\alpha_0^4} A'''^2, \\ n_1 n_2 n_3 = \frac{27}{a_0^3} a_0^2 \varphi, & \nu_1 \nu_2 \nu_3 = \frac{27}{\alpha^6} \alpha_0^2 \psi; \end{cases}$$

e formando le equazioni:

$$d_0 x^3 + 3 d_1 x^2 + 3 d_2 x + d_3 = 0,$$

$$\delta_0 x^3 + 3 \delta_1 x^2 + 3 \delta_2 x + \delta_3 = 0,$$

aventi per radici n_1, n_2, n_3; ν_1, ν_2, ν_3; fatto

$$D_1 = d_1^2 - d_0 d_2, \qquad D' = \delta_1^2 - \delta_0 \delta_2, \qquad \text{ecc.},$$

osservando alle (1) ed alla

$$4 A'^2 - \alpha_0^2 = a_0^2 \varphi,$$

si hanno le

$$a^4 \varphi^2 D_1 = \alpha^4 D',$$

$$a_0^{12} \varphi^6 (4 D_1 D_3 - D_2^2) = \alpha^{12} (4 D' D''' - D''^2),$$

per le quali:

$$(7) \quad \begin{cases} a_0^4 \varphi^2 (n_2 - n_3)^2 = \alpha_0^4 (\nu_2 - \nu_3)^2, \\ a_0^4 \varphi^2 (n_3 - n_1)^2 = \alpha^4 (\nu_3 - \nu_1)^2, \\ a^4 \varphi^2 (n_1 - n_2)^2 = \alpha^4 (\nu_1 - \nu_2)^2. \end{cases}$$

Le equazioni (3), (5), (7), avendo riguardo ai gruppi (2), (4), (6), dànno origine alle

$$a_0^2 \varphi l_1 = \tfrac{1}{3}\alpha_0^2(-\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3),$$

$$a_0^2 \varphi m_1 = \tfrac{1}{3}\alpha_0^2(-\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3),$$

$$a_0^2 \varphi n_1 = \tfrac{1}{3}\alpha_0^2(-\nu_1 + 2\nu_2 + 2\nu_3),$$

$$a_0^2 \varphi l_2 = \tfrac{1}{3}\alpha_0^2(2\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3),$$

$$a_0^2 \varphi m_2 = \tfrac{1}{3}\alpha_0^2(2\mu_1 - \mu_2 + 2\mu_3),$$

$$a_0^2 \varphi n_2 = \tfrac{1}{3}\alpha_0^2(2\nu_1 - \nu_2 + 2\nu_3),$$

$$a_0^2 \varphi l_3 = \tfrac{1}{3}\alpha_0^2(2\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3),$$

$$a_0^2 \varphi m_3 = \tfrac{1}{3}\alpha_0^2(2\mu_1 + 2\mu_2 - \mu_3),$$

$$a_0^2 \varphi n_3 = \tfrac{1}{3}\alpha_0^2(2\nu_1 + 2\nu_2 - \nu_3).$$

Per mezzo di queste relazioni dimostrasi facilmente un teorema enunciato recentemente dal sig. HERMITE nel « Quarterly Journal » [vol. I (1857), p. 20]; cioè che le due forme quadratiche:

$$g = a_0^2[l(x_2 - x_3)^2(x - x_1 y)^2 + m(x_3 - x_1)^2(x - x_2 y)^2 + n(x_1 - x_2)^2(x - x_3 y)^2],$$

$$G = \alpha_0^2[\lambda(y_2 - y_3)^2(x - y_1 y)^2 + \mu(y_3 - y_1)^2(x - y_2 y)^2 + \nu(y_1 - y_2)^2(x - y_3 y)^2],$$

nelle quali l, m, n; λ, μ, ν sono costanti arbitrarie, godono della singolare proprietà di essere

$$G = g \cdot \varphi,$$

assumendo:

$$\lambda = -l + \tfrac{2}{3}(l + m + n), \quad \mu = -m + \tfrac{2}{3}(l + m + n), \quad \nu = -n + \tfrac{2}{3}(l + m + n).$$

Ottobre 1855.

[G.].

XXX.

SUL DISCRIMINANTE DELLE FUNZIONI OMOGENEE A DUE INDETERMINATE E SULL'EQUAZIONE AI QUADRATI DELLE DIFFERENZE.

Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, tomo VII, [illegible]

1. Sia

$$F(x,\ y) = a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} y + \ldots + a_n y^n$$

una funzione omogenea a due indeterminate, ed x_1, x_2, ... x_n le n radici dell'equazione $F(x,\ 1) = 0$. Sia φ una funzione qualunque delle radici x_1, x_2, ...; si avrà:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial x},$$

$$\sum x \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \sum x \frac{\partial x_1}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \sum x \frac{\partial x_n}{\partial x}.$$

Ma ponendo

$$p_m = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \ldots m}, \qquad p_0 = 1,$$

si ha, come è noto,

$$-p_r \frac{\partial x_i}{\partial x} = p_{r-1} x_i^{r-1} + p_{r-2} x_i^{r-2} + \ldots + p_0 x_i^{0};$$

quindi sostituendo si otterrà:

$$-\sum x \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{p_1} k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{1}{p_2} k_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \ldots + \frac{1}{p_n} k_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n},$$

nella quale

$$k_{i,r} = p_{r-1} a_{r-1} s_{i+1} + p_{r-2} a_{r-2} s_{i+2} + \dots + p_0 a_0 s_{i+r},$$

ed

$$s_i = x_1^i + x_2^i + \dots + x_n^i.$$

Supponiamo ora che φ sia il discriminante della funzione F, cioè sia

$$\varphi = a_0^{2n-2} (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 \dots (x_{n-1} - x_n)^2;$$

si ha facilmente:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_r} = \varphi \frac{F''(x_r)}{F'(x_r)},$$

ed in conseguenza:

$$\sum x_r^i \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} = \varphi \sum x_r^i \frac{F''(x_r)}{F'(x_r)}.$$

La quantità che moltiplica φ nel secondo membro di questa equazione viene espressa in funzione dei coefficienti $a_0, a_1, \dots$, applicando a questo caso una formola da me pubblicata nel giornale del signor CRELLE *). Avremo così:

$$\sum x_r^i \frac{F''(x_r)}{F'(x_r)} = (-1)^{i+1} \frac{1}{a_0^{i+1}} \begin{vmatrix} q_0 a_0 & p_0 a_0 & 0 & \dots & 0 \\ q_1 a_1 & p_1 a_1 & p_0 a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{i-2} a_{i-2} & p_{i-2} a_{i-2} & p_{i-3} a_{i-3} & \dots & p_0 a_0 \\ q_{i-1} a_{i-1} & p_{i-1} a_{i-1} & p_{i-2} a_{i-2} & \dots & p_1 a_1 \end{vmatrix},$$

nella quale

$$q_r = (n - r - 1)(n - r) p_r.$$

Quindi, indicando con Δ_i il determinante del secondo membro dell'equazione superiore si otterrà che il discriminante φ deve soddisfare alle equazioni:

$$(1) \qquad \frac{1}{p_1} k_{i,1} \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + \frac{1}{p_2} k_{i,2} \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \dots + \frac{1}{p_n} k_{i,n} \frac{\partial \varphi}{\partial a_n} = (-1)^i \frac{\varphi}{a_0^i} \Delta_i.$$

Se in questa equazione facciamo $i = 0, 1, 2$, osservando essere

$$k_{0,r} = (n - r + 1) p_{r-1} a_{r-1}, \quad k_{1,r} = - r p_r a_r, \quad k_{2,r} = \frac{p_r}{a_0} [n a_1 a_r - (n - r) a_0 a_{r+1}],$$

$$\Delta_0 = 0, \quad \Delta_1 = n(n-1) a_0, \quad \Delta_2 = 2 n (n-1) a_0 a_1,$$

*) *Sur deux formules relatives à la théorie de la décomposition des fractions rationnelles.* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. L (1855), p. 239].

si avranno le

$$
(2)\quad
\begin{cases}
a_0 \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_1} + 2 a_1 \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \dots + n a_{n-1} \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_n} = 0, \\[2ex]
a_1 \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_1} + 2 a_2 \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \dots + n a_n \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_n} = n(n-1)\varphi, \\[2ex]
[n a_1^2 - (n-1) a_0 a_2] \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_0} + [n a_1 a_2 - (n-2) a_0 a_3] \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_1} + \dots + n a_1 a_n \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_n} \\
\qquad = 2n(n-1) a_1 \varphi .
\end{cases}
$$

A queste tre equazioni, pel caso del discriminante, si possono ridurre quelle date dal signor Cayley come caratteristiche di un invariante della funzione F.

Pel valore di $k_{i,r}$ si hanno facilmente le equazioni:

$$f_0 k_{i,0} + f_1 k_{i,1} + \dots + f_n k_{i,n} = 0,$$

$$f_1 k_{i,0} + f_2 k_{i,1} + \dots + f_n k_{i,n-1} = 0, \quad \text{ecc.}$$

per cui evidentemente la equazione (1) non fornisce che n equazioni indipendenti fra loro, le quali si ottengono ponendo nella medesima $i = 0, 1, 2, \dots n - 1$.

2. Osserviamo che tutti i coefficienti dell'equazione ai quadrati delle differenze soddisfano a due equazioni analoghe alle prime due delle (2). Infatti, indichiamo con

$$x^m + c_1 x^{m-1} + c_2 x^{m-2} + \dots + c_m = 0 \qquad \left(m = \frac{n(n-1)}{2}\right)$$

la equazione ai quadrati delle differenze della $F(x, 1) = 0$; e con S_r la somma delle potenze erresime delle radici di quella equazione. Si ottengono facilmente le

$$\sum \frac{\partial S_r}{\partial x_i} = 0, \qquad \sum x_i \frac{\partial S_r}{\partial x_i} = 2r S_r,$$

e da queste le

$$\sum \frac{\partial c_r}{\partial x_i} = 0, \qquad \sum x_i \frac{\partial c_r}{\partial x_i} = 2r c_r;$$

per cui un coefficiente c_r qualunque soddisferà alle due equazioni:

$$
(3)\quad
\begin{cases}
a_0 \dfrac{\partial c_r}{\partial a_1} + 2 a_1 \dfrac{\partial c_r}{\partial a_2} + \dots + n a_{n-1} \dfrac{\partial c_r}{\partial a_n} = 0, \\[2ex]
a_1 \dfrac{\partial c_r}{\partial a_1} + 2 a_2 \dfrac{\partial c_r}{\partial a_2} + \dots + n a_n \dfrac{\partial c_r}{\partial a_n} = 2 r c_r .
\end{cases}
$$

La seconda di queste equazioni mostra che ciascuno dei coefficienti c_1, c_2, ... è una funzione omogenea in indici dei coefficienti a_0, a_1, ...; e quindi la forma di essi sarà

determinata allorquando ne sia conosciuto il grado. Ora vedesi facilmente che $c_1, c_2, \dots c_{n-1}$ saranno rispettivamente dei gradi 2, 4, 6, ... $2(n-1)$, e che $c_n, c_{n+1}, \dots c_m$ saranno tutti del grado $2(n-1)$. Da ciò risulta che fra quei coefficienti non vi è che l'ultimo il quale goda della proprietà di essere invariante della $F(x, y)$. Infatti è noto che una proprietà caratteristica di un invariante è che, essendone p il grado, sia il medesimo omogeneo in indice del grado $\frac{1}{2} p n$, cioè indicando con q questo indice sia:

$$q = \frac{1}{2} p n .$$

Ora, se considerasi un coefficiente c_{n-i}, si ha $p = 2(n-i)$, $q = 2(n-i)$, e quindi l'equazione superiore richiede sia $n = 2$; e se si considera un coefficiente c_{n+i} si ha:

$$p = 2(n-1), \qquad q = 2(n+i);$$

quindi

$$i = \frac{n(n-3)}{2}, \quad \text{ed} \quad n+i = \frac{n(n-1)}{2};$$

vale a dire l'equazione superiore non sarà soddisfatta che pel coefficiente c_m.

Conoscendosi la forma di un coefficiente qualunque c_r, la prima dell'equazioni (3) servirà a determinare in parte i coefficienti numerici di essa forma. A questo scopo alla medesima (3) possiamo aggiungerne molte altre facendo uso del metodo per la calcolazione delle funzioni simmetriche, pubblicato in questi Annali *); metodo che in questo caso particolare si rende di una semplicissima applicazione come ora mostreremo. Rammentiamo l'equazione fondamentale della Nota citata:

$$[illegible]$$

ed osserviamo che, potendosi supporre

$$\frac{\partial c}{\partial s_1} = \frac{\partial c}{\partial S_1}\frac{\partial S_1}{\partial s_1} + \frac{\partial c}{\partial S_2}\frac{\partial S_2}{\partial s_1} + \dots + \frac{\partial c}{\partial S_m}\frac{\partial S_m}{\partial s_1},$$

si ha:

$$[illegible]$$

per la quale quella equazione si trasforma nella seguente:

(4) $$[illegible]$$

*) [illegible]

I valori di $\frac{\partial S_r}{\partial a_1}$, $\frac{\partial S_r}{\partial a_2}$, ... si trovano facilmente mediante la nota formola che dà le somme delle potenze delle radici dell'equazione ai quadrati delle differenze in funzione delle somme delle potenze delle radici della proposta; quindi il secondo membro di quest'ultima equazione si potrà considerare come una funzione conosciuta di $a_1, a_2, \ldots$; e la equazione medesima servirà alla determinazione dei coefficienti numerici. Ponendo per es. nella (4) $r = 1$ si ha la

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{n} a_1 \frac{\partial c_r}{\partial a_1} + \frac{2}{n-1} a_2 \frac{\partial c_r}{\partial a_2} + \ldots + \frac{n-1}{2} a_{n-1} \frac{\partial c_r}{\partial a_{n-1}} + n a_n \frac{\partial c_r}{\partial a_n} \\ \qquad = -2 [illegible] \end{array} \right.$$

dalla quale e dalla prima delle (3) si ponno ottenere ordinatamente i coefficienti numerici delle $c_1, c_2, \ldots$. Però nei casi particolari converrà scegliere per r i valori n, $n - 1$, ecc., giacchè questi rendono più breve la calcolazione dei secondi membri.

3. Col metodo esposto superiormente vennero calcolati alcuni termini dell'equazione ai quadrati delle differenze della $F(x, 1) = 0$.

Ricerca del valore di c_1. — Si ha:

$$c_1 = A a_1^2 + B a_0 a_2 .$$

La prima delle (3) dà

$$A + B = 0,$$

e la (5):

$$\frac{2}{n} A + \frac{2}{n-1} B = \frac{2 [illegible]}{a_0^2};$$

quindi

$$c_1 = \frac{n^2(n-1)}{a_0^2}(a_0 a_2 - a_1^2).$$

Ricerca del valore di c_2. — Si ha:

$$c_2 = A a_1^4 + B a_0 a_1^2 a_2 + C a_0^2 a_1 a_3 + D a_0^2 a_2^2 + E a_0^3 a_4 .$$

Dalla prima delle (3) si ottiene:

$$2A + B = 0, \qquad 2B + 4D + 3C = 0, \qquad C + 4E = 0,$$

e la (5) dà:

$$\frac{2}{n} A + \frac{1}{n-1} B = -n(n-2)\frac{1}{a_0^4},$$

$$\frac{2}{n} B + \frac{4}{n-1} D + \frac{3}{n-2} C = n^2(n-1)(2n-3)\frac{1}{a_0^4},$$

$$\frac{1}{n} C + \frac{4}{n-3} E = n(n-1)(n-2)\frac{1}{a_0^4},$$

per le quali:

$$c_2 = \frac{n^2(n-1)(n-2)}{2a_0^4}\left[n^2(a_0a_2 - a_1^2)^2 + \frac{n-3}{2\cdot 3}a_0^2(a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2)\right].$$

Analogamente si ottengono i valori di $c_3, c_4, \ldots$; ed indicando con $I_{r,s}$ l'invariante di grado r d'una funzione omogenea a due indeterminate di grado s^{mo}, ossia ponendo

$$I_{2,2} = a_0a_2 - a_1^2,$$

$$I_{2,4} = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2,$$

$$I_{2,6} = a_0a_6 - 6a_1a_5 + 15a_2a_4 - 10a_3^2, \text{ ecc.},$$

$$I_{3,4} = a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 - a_2^3, \text{ ecc.},$$

si hanno le

$$c_1 = \frac{n^2(n-1)}{a_0^2}I_{2,2},$$

$$c_2 = \frac{n^2(n-1)(n-2)}{2a_0^4}\left[n^2I_{2,2}^2 + \frac{n-3}{2\cdot 3}a_0^2I_{2,4}\right],$$

$$c_3 = \frac{n^3(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 3a_0^6}\left[n^3I_{2,2}^3 + \frac{n^2}{2(n-3)}(n^2-5n+8)a_0^2I_{2,2}I_{2,4}\right.$$

$$\left. - \frac{n}{2(n-3)}(7n-15)a_0^3I_{3,4} + \frac{(n-4)(n-5)}{2\cdot 5\cdot 6}a_0^4I_{2,6}\right],$$

$$c_4 = \frac{n^4(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2\cdot 3\cdot 4a_0^8}\left[n^6I_{2,2}^4 + n^4\frac{n^2-5n+10}{n-4}a_0^2I_{2,2}^2I_{2,4}\right.$$

$$- 2n^3\frac{7n-19}{n-4}a_0^3I_{2,2}I_{3,4} + \frac{1}{12}n^2\frac{n^3-7n^2+3n+15}{n-4}a_0^4I_{2,4}^2$$

$$\left. + \frac{1}{15}n(n^2-7n+26)a_0^4I_{2,2}I_{2,6} - \frac{2}{3}n(3n-7)a_0^5X + \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 8}(n-5)(n-6)(n-7)a_0^6I_{2,8}\right],$$

nella quale la X è la seguente forma del terzo grado:

$$X = a_0a_3a_5 + 3a_1a_2a_5 - a_1a_3a_4 - 3a_0a_2a_6 - a_1^2a_6 - 3a_2^2a_4 + 2a_2a_3^2 + 2a_0a_4^2.$$

4. Aggiungiamo una osservazione che può tornar utile nell'applicazione del metodo succitato alla calcolazione delle funzioni simmetriche. Ponendo per brevità $p_r a_r = \alpha_r$ si ha, indicando con ψ una funzione qualsiasi, la relazione:

$$\alpha_0\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_1} + \alpha_1\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_2} + \ldots + \alpha_{r-1}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_r} + r\frac{\partial\psi}{\partial s_r} = 0.$$

Rammentando il metodo con cui venne trovata questa formola, comprendesi facilmente che per $\frac{\partial \psi}{\partial s_r}$ devesi intendere la derivata totale di ψ rispetto ad s_r; cioè, siccome formando il valore di ψ colle somme delle potenze potrebbe questo valore contenere $s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots$, mentre nella ricerca dell'equazione superiore si è supposto ψ funzione delle sole s_1, $s_2, \ldots s_n$, si dovrà nel valore medesimo sostituire per $s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots$ i valori formati colle $s_1, s_2, \ldots s_n$, e quindi formarne la derivata totale rispetto ad s_r. Questa sostituzione, la quale renderebbe il metodo prolisso, si può ovviare osservando che per la medesima risulterebbe:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s_r} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial s_r}\right) + \frac{\partial \psi}{\partial s_{n+1}} \frac{\partial s_{n+1}}{\partial s_r} + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial s_{n+j}} \frac{\partial s_{n+j}}{\partial s_r},$$

essendo $\left(\frac{\partial \psi}{\partial s_r}\right)$ la derivata parziale di ψ rispetto ad s_r, ed s_{n+j} la somma delle radici di indice maggiore fra quelle che compongono il valore di ψ; e quindi effettivamente abbisognano soltanto i valori di $\frac{\partial s_{n+1}}{\partial s_r}, \frac{\partial s_{n+2}}{\partial s_r}, \ldots$ formati coi coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$.
Ora

$$\frac{\partial s_{n+i}}{\partial s_r} = (n+i) \sum x^{n+i-1} \frac{\partial x}{\partial s_r};$$

ma

$$\frac{\partial x}{\partial s_r} = \frac{1}{r F'(x)} (\alpha_0 x^{n-r} + \alpha_1 x^{n-r-1} + \ldots + \alpha_{n-r});$$

quindi, posto

$$\psi_r(x) = \alpha_0 x^{n} + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-r} x^r,$$

si ha:

$$\frac{\partial s_{n+i}}{\partial s_r} = \frac{n+i}{r} \sum \frac{x^{i-1} \psi_r(x)}{F'(x)},$$

essendo $\omega = n + i - r$. Quindi:

$$(6) \qquad \frac{\partial s_{n+i}}{\partial s_r} = (-1)^{\omega} \frac{n+i}{r} \frac{1}{\alpha_0^{\omega+1}} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_r & \alpha_{r-1} & \alpha_{r-2} & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_{r+1} & \alpha_r & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \alpha_{\omega-1} & \alpha_{\omega-2} & \ldots & \alpha_0 \\ 0 & \alpha_\omega & \alpha_{\omega-1} & \ldots & \alpha_1 \end{vmatrix}.$$

nella quale devesi porre $\alpha_{n+1} = \alpha_{n+2} = \ldots = 0$. Ponendo

$$H_i = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_i & \alpha_{i-1} & \alpha_{i-2} & \ldots & \alpha_1 \end{vmatrix}, \qquad H_0 = 1$$

e sviluppando il determinante della (6), si ottiene la espressione più semplice:

$$\frac{\partial s_{n+i}}{\partial s_i} = \frac{n+i}{i}\left[-\frac{\alpha_n}{\alpha_0} H + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_0^2} H_1 - \ldots + (-1)^i \frac{\alpha_{n-i+1}}{\alpha_0^i} H_{i-1}\right].$$

Abbiamo così, per esempio,

$$\frac{\partial s_{n+i}}{\partial s_1} = (-1)^i (n+i) \frac{\alpha_n}{\alpha_0^i} H_{i-1},$$

$$\frac{\partial s_{n+i}}{\partial s_2} = \frac{n+i}{2}\left[(-1)^{i-1} \frac{\alpha_n}{\alpha_0^{i-1}} H_{i-2} + (-1)^i \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_0^i} H_{i-1}\right], \quad \text{ecc.};$$

per cui:

$$\frac{\partial s_{n+1}}{\partial s_1} = -(n+1)\frac{\alpha_n}{\alpha_0}, \qquad \frac{\partial s_{n+1}}{\partial s_2} = -\frac{n+1}{2}\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_0},$$

$$\frac{\partial s_{n+2}}{\partial s_2} = \frac{n+2}{2}\left[-\frac{\alpha_n}{\alpha_0} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_0^2}\alpha_1\right], \quad \text{ecc.},$$

le quali si ponno verificare direttamente.

Ottobre 1855.

[G.].

la forma seguente:

$$-Q_1 = (m-1)N + \sum_{1} (r-m+1) a_r \frac{\partial \varphi}{\partial a_r},$$

$$-Q_2 = s_1 N + (m-2) N_1 + \sum_{1} (r-m+3) \frac{p_{r+1}}{p_r} a_{r+1} \frac{\partial \varphi}{\partial a_r},$$

. . . .

$$-Q_m = s_{m-1} N + s_{m-2} N_1 + \dots + s_1 N_{m-2} + \sum_{1} (r+m-1) \frac{p_{r+m-1}}{p_r} a_{r+m-1} \frac{\partial \varphi}{\partial a_r}.$$

Si moltiplichino ordinatamente queste equazioni per

$$p_{m-1} a_{m-1}, \qquad p_{m-2} a_{m-2}, \qquad \dots \qquad p_0 a_0,$$

e si sommino le risultanti; si ottiene la

$$\sum_{1} \frac{1}{p_r} \frac{\partial \varphi}{\partial a_r} [(r-m+1) p_{m-1} p_r a_{m-1} a_r + (r-m+3) p_{m-2} p_{r+1} a_{m-2} a_{r+1} + \dots + (r+m-1) p_0 p_{r+m-1} a_0 a_{r+m-1}]$$
$$= -(Q_1 p_{m-1} a_{m-1} + Q_2 p_{m-2} a_{m-2} + \dots + Q_m p_0 a_0).$$

Ma pei valori di Q_1, Q_2, ... Q_m dati dall'equazione (1) si dimostra facilmente essere

$$Q_1 p_{m-1} a_{m-1} + Q_2 p_{m-2} a_{m-2} + \dots + Q_m p_0 a_0 = -\varphi q_{m-1} a_{m-1},$$

per il che si avrà:

$$\sum_{1} \frac{1}{p_r} \frac{\partial \varphi}{\partial a_r} [(r-m+1) p_{m-1} p_r a_{m-1} a_r + \dots + (r+m-1) p_0 p_{r+m-1} a_0 a_{r+m-1}] = \varphi q_{m-1} a_{m-1},$$

nella quale ponendo $m = 1, 2, \dots n-1$ si hanno $n-1$ equazioni che si possono sostituire alle analoghe che ottengonsi dalla (1) facendo in questa $i = 1, 2, \dots n-1$.

[G.].

XXXII.

INTORNO GLI INVARIANTI DEL TERZO GRADO DELLE FUNZIONI OMOGENEE A DUE INDETERMINATE.

Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, tomo VII

È noto essere un corollario della legge di reciprocità dell'HERMITE che le sole funzioni del grado $4i$ ammettono invarianti del terzo grado. In questa Nota espongo una regola semplice per determinare l'invariante del terzo grado della forma di grado $n = 4i$:

$$f = a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} y + \ldots + a_n y^n.$$

Indico con α_0 l'invariante quadratico della forma:

$$\varphi = a_0 x^m + m a_1 x^{m-1} y + \ldots + a_m y^m,$$

supposto $m = 2i$, cioè

$$\alpha_0 = a_0 a_{2i} - 2i a_1 a_{2i-1} + \ldots$$

$$+ (-1)^{i-1} \frac{2i(2i-1)\ldots(i+2)}{1.2\ldots(i-1)} a_{i-1} a_{i+1} + (-1)^i \frac{1}{2} \frac{2i(2i-1)\ldots(i+1)}{1.2\ldots i} a_i^2$$

e, rappresentando con $\Delta(\varphi)$ l'operazione

$$n a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_0} + (n-1) a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + \ldots + a_n \frac{\partial \varphi}{\partial a_{n-1}},$$

pongo

$$\alpha_1 = \frac{1}{n} \Delta(\alpha_0), \qquad \alpha_2 = \frac{1}{n-1} \Delta(\alpha_1), \qquad \ldots \qquad \alpha_i = \Delta(\alpha_{i-1}).$$

Se con I_n denotasi l'invariante cubico della funzione f, si ha:

$$3 I_n = a_0 \alpha_n - n a_1 \alpha_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} a_2 \alpha_{n-2} - \dots - n a_{n-1} \alpha_1 + a_n \alpha_0 .$$

Aggiungiamo, ad esempio, l'invariante cubico della funzione di ottavo grado:

$$I_8 = a_0 a_4 a_8 - 4 a_0 a_5 a_7 - 4 a_1 a_3 a_8 + 12 a_1 a_4 a_7 - 8 a_1 a_5 a_6 - 8 a_2 a_3 a_7$$
$$- 22 a_2 a_4 a_6 - 36 a_3 a_4 a_5 + 3 a_0 a_6^2 + 3 a_2^2 a_8 + 24 a_2 a_5^2 + 24 a_3^2 a_6 + 15 a_4^3 .$$

Mediante una legge che ha qualche analogia colla superiore si ottengono, per forme di grado pari, altre funzioni dei coefficienti pure del terzo grado, ma che in generale non sono invarianti, le quali insieme agli invarianti quadratici e cubici entrano a formare i valori dei coefficienti c_1, c_2, ... della equazione ai quadrati delle differenze. La legge a cui accenniamo è la seguente. Consideriamo la forma f nella quale si supponga n pari, e la φ nella quale si supponga $m = n - s$ $\left(s \text{ numero pari } < \frac{1}{2} n\right)$. Sia α_0 l'invariante quadratico di φ e si formino le

$$\alpha_1 = \frac{1}{2s} \Delta(\alpha_0), \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2s-1} \Delta(\alpha_1), \qquad \dots \qquad \alpha_{2s} = \Delta(\alpha_{2s-1}).$$

La espressione

$$H = a_0 \alpha_{2s} - 2s a_1 \alpha_{2s-1} + \frac{2s(2s-1)}{2} a_2 \alpha_{2s-2} - \dots + a_{2s} \alpha_0$$

è il tipo generale delle funzioni suddette.

Per esempio, supponendo $n = 4$, $s = 2$, si ottiene

$$H = 3 I_4 ;$$

e nell'ipotesi di $n = 6$, $s = 2$ si ha:

$$H = 2(a_0 a_2 a_6 + 3 a_1 a_2 a_5 - a_1 a_3 a_4 - 3 a_0 a_3 a_5 - a_1^2 a_6 - 3 a_2^2 a_4 + 2 a_2 a_3^2 + 2 a_0 a_4^2),$$

la quale espressione di terzo grado entra a comporre, come si è veduto sopra, il valore di c_4 coefficiente del quinto termine dell'equazione ai quadrati delle differenze.

Questo lavoro era già da qualche tempo stato spedito al sig. prof. TORTOLINI, quando nei fascicoli di settembre e ottobre 1855 di questi « Annali » ho letto le due interessanti Note del sig. cav. FAÀ DI BRUNO sulle funzioni simmetriche delle radici di una equazione. Stante la relazione fra l'argomento della seconda di esse Note e quello del lavoro che

precede credo non [illegible] Teorema I [illegible] trovasi applicato alla ricerca dei coefficienti dell'equazione ai quadrati delle differenze, è una conseguenza dell'equazione

$$\sum [illegible] = 0,$$

e come tale venne da me presentato nella Nota *Sulla teorica degli invarianti* (giugno 1854) *). Ora aggiungo che, allorquando questa equazione è soddisfatta, la funzione φ ha la proprietà che la somma dei suoi coefficienti numerici presi col rispettivo segno è eguale a zero. Il Teorema II è sotto un certo punto di vista incompleto, mentre vi si accenna ad una sola equazione alle derivate parziali, alla quale deve soddisfare il risultante di due equazioni, mentre debbono essere almeno due, come ha enunciato il SYLVESTER doversi verificare per un invariante qualsivoglia comune a due forme omogenee a due indeterminate [*On a Theory of the Syzygetic Relations*, etc. («Philosophical Transactions», Part. 3, 1853, pag. 516)]. Io sono però giunto a dimostrare che il risultante di due equazioni dei gradi m, n soddisfa ad $m + n$ equazioni alle derivate parziali lineari di forma affatto differente di quelle del SYLVESTER, e che io credo essere le caratteristiche per un risultante. Il quale risultato spero poter presto pubblicare.

22 dicembre 185[illegible].

[G.].

---

*) [XVII, pp. 111-114].

XXXIII.

RICERCHE ALGEBRICHE SULLE FORME OMOGENEE A DUE INDETERMINATE *).

Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, tomo VII [illegible]

1. Adottando l'ingegnosa notazione del sig. CAYLEY, indicheremo con

$$(a_0, a_1, \ldots a_n)(x, y)^n$$

la forma omogenea dell'ennesimo grado a due indeterminate:

$$u = a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} y + \ldots + a_n y^n.$$

LEMMA I. — *Sieno $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ due covarianti della forma u; qualunque sieno le costanti h, k, la forma seguente:*

$$\varphi[hx - k\psi'(y),\ hy + k\psi'(x)]$$

sarà un covariante della stessa forma u; cioè i coefficienti dello sviluppo saranno tutti covarianti di u.

Questo teorema, facilmente dimostrabile, venne enunciato dal sig. HERMITE nella sua interessante Memoria sulla teoria delle funzioni omogenee **); qui faremo notare una importante proprietà dei covarianti ottenuti quali coefficienti dello sviluppo. Pongasi

$$p = -\psi'(y), \qquad q = \psi'(x);$$

il coefficiente del termine $(r+1)^{mo}$ dello sviluppo sarà, non tenendo conto di un fat-

*) [Nella ristampa di questa Memoria si è tenuto conto di alcune modificazioni apportate dall'Autore e trovate in un suo manoscritto].

**) The Cambridge and Dublin Mathematical Journal, vol. IX (1854), p. 172.

tore numerico,

$$\Delta_r = [p\varphi'(x) + q\varphi'(y)]^{(r)}.$$

Si indichi con $\left(\frac{\partial \Delta_r}{\partial x}\right)$ la derivata rispetto ad x della funzione Δ_r, considerando nella medesima le p, q quali costanti; si ha evidentemente:

$$\Delta_{r+1} = p\left(\frac{\partial \Delta_r}{\partial x}\right) + q\left(\frac{\partial \Delta_r}{\partial y}\right);$$

ma

$$\frac{\partial \Delta_r}{\partial x} = \left(\frac{\partial \Delta_r}{\partial x}\right) + \frac{\partial \Delta_r}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \Delta_r}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x},$$

quindi, posto

$$p_1 = p\frac{\partial p}{\partial x} + q\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad q_1 = p\frac{\partial q}{\partial x} + q\frac{\partial q}{\partial y}$$

ed osservando che

$$\frac{\partial \Delta_r}{\partial p} = r\left(\frac{\partial \Delta_{r-1}}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial \Delta_r}{\partial q} = r\left(\frac{\partial \Delta_{r-1}}{\partial y}\right),$$

si ottiene:

$$\Delta_{r+1} = p\frac{\partial \Delta_r}{\partial x} + q\frac{\partial \Delta_r}{\partial y} - r\left[p_1\left(\frac{\partial \Delta_{r-1}}{\partial x}\right) + q_1\left(\frac{\partial \Delta_{r-1}}{\partial y}\right)\right].$$

Ripetendo la operazione è evidente che, posto

$$p_2 = p_1\frac{\partial p}{\partial x} + q_1\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad q_2 = p_1\frac{\partial q}{\partial x} + q_1\frac{\partial q}{\partial y},$$

giungesi alla

$$\Delta_{r+1} = p\frac{\partial \Delta_r}{\partial x} + q\frac{\partial \Delta_r}{\partial y} - r\left(p_1\frac{\partial \Delta_{r-1}}{\partial x} + q_1\frac{\partial \Delta_{r-1}}{\partial y}\right) + r\left(p_2\frac{\partial \Delta_{r-1}}{\partial p} + q_2\frac{\partial \Delta_{r-1}}{\partial q}\right).$$

Ora, supponendo che la funzione $\psi(x, y)$ sia del grado s rispetto alle variabili, si hanno le

$$x\frac{\partial p}{\partial x} + y\frac{\partial p}{\partial y} = (s-1)p, \qquad x\frac{\partial q}{\partial x} + y\frac{\partial q}{\partial y} = (s-1)q;$$

dalle quali, osservando essere $\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial q}{\partial y}$, si hanno le

$$Hx = (s-1)\left(p\frac{\partial p}{\partial x} + q\frac{\partial p}{\partial y}\right), \qquad Hy = (s-1)\left(p\frac{\partial q}{\partial x} + q\frac{\partial q}{\partial y}\right),$$

essendo

$$H = -\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \end{vmatrix}.$$

Si avranno quindi le

$$Hx = (s-1)p_1, \quad Hy = (s-1)q_1; \quad Hp = p_2, \quad Hq = q_2;$$

ed essendo

$$p\frac{\partial \Delta_{r-1}}{\partial p} + q\frac{\partial \Delta_{r-1}}{\partial q} = (r-1)\Delta_{r-1},$$

$$x\frac{\partial \Delta_{r-1}}{\partial x} + y\frac{\partial \Delta_{r-1}}{\partial y} = [(r-1)(s-1) + (i-r+1)]\Delta_{r-1}$$

[supposto essere i il grado del covariante $\varphi(x, y)$], si otterrà:

$$(1) \qquad \Delta_{r+1} = \varphi'(x)\frac{\partial \Delta_r}{\partial y} - \varphi'(y)\frac{\partial \Delta_r}{\partial x} - \frac{r(i-r+1)}{s-1} H\Delta_{r-1},$$

nella qual formola è contenuta la proprietà che si voleva stabilire.

Lemma II. — *Sia $\varphi(a_0, a_1, \dots a_n)$ un invariante di grado r della forma u; e, considerando una seconda forma*

$$f = (c_0, c_1, \dots c_m)(x, y)^m$$

di grado $m > n$, si sostituiscano ordinatamente nell'invariante φ, in luogo di $a_0, a_1, \dots a_n$, le derivate

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}, \quad \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}, \quad \dots \quad \frac{\partial^n f}{\partial y^n},$$

le quali per brevità indicheremo con $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_n$. La espressione

$$\varphi(\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_n),$$

di grado r rispetto ai coefficienti e di grado $(m-n)r$ rispetto alle variabili, sarà un covariante della forma f.

Infatti, si indichino con P, Q i simboli di operazione:

$$c_0\frac{\partial}{\partial c_1} + 2c_1\frac{\partial}{\partial c_2} + \dots + mc_{m-1}\frac{\partial}{\partial c_m},$$

$$mc_1\frac{\partial}{\partial c_0} + (m-1)c_2\frac{\partial}{\partial c_1} + \dots + c_m\frac{\partial}{\partial c_{m-1}};$$

si avranno evidentemente le

$$P(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_0}P(\alpha_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1}P(\alpha_1) + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_n}P(\alpha_n),$$

$$Q(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_0}Q(\alpha_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1}Q(\alpha_1) + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_n}Q(\alpha_n).$$

Ora

$$P(\alpha_r)=\frac{\partial^n[yf'(x)]}{\partial x^{n-r}\partial y^r},\qquad Q(\alpha_r)=\frac{\partial^n[xf'(y)]}{\partial x^{n-r}\partial y^r},$$

ossia

$$P(\alpha_r)=r\alpha_{r-1}+y\frac{\partial\alpha_r}{\partial x},\quad Q(\alpha_r)=(n-r)\alpha_{r+1}+x\frac{\partial\alpha_r}{\partial y};$$

quindi

$$P(\varphi)=\alpha_0\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_1}+2\alpha_1\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_2}+\dots+n\alpha_{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_n}+y\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

$$Q(\varphi)=n\alpha_1\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_0}+(n-1)\alpha_2\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_1}+\dots+\alpha_n\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_{n-1}}+x\frac{\partial\varphi}{\partial y};$$

ed essendo la forma φ quella di un invariante si hanno:

$$P(\varphi)-y\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0,\qquad Q(\varphi)-x\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,$$

le quali dimostrano essere $\varphi(\alpha_0,\alpha_1,\dots\alpha_n)$ un covariante della forma f.

2. Si indichi con v il determinante

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix},$$

nel quale $u_{11}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\dots$; e con w il determinante analogo formato colle derivate seconde di v. Il determinante v è l'Hessiano di u, ed il w l'Hessiano di v, od il post-Hessiano di u. Il CAYLEY ed il SYLVESTER già da tempo, ed il SALMON recentemente *), generalizzando un teorema di HESSE, hanno dimostrato che il post-Hessiano w è esprimibile in funzione lineare dell'Hessiano v e della forma u. Se poniamo per brevità:

$$\alpha_0=\frac{\partial^4 u}{\partial x^4},\quad \alpha_1=\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y},\quad\dots\quad \alpha_4=\frac{\partial^4 u}{\partial y^4},$$

ed indichiamo con B, C le espressioni:

$$\alpha_0\alpha_4-4\alpha_1\alpha_3+3\alpha_2^2,\qquad \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{vmatrix},$$

le quali pel Lemma II sono covarianti della forma u, la espressione suddetta pel post-

*) *Researches in the Hyperdeterminant Calculus* (Cambridge and Dublin Mathematical Journal, vol. IX ([illegible]), p. [illegible]).

Hessiano w è la seguente:

$$(2) \quad (n-2)(n-3)^2 w = n(n-1)(2n-5) C u - (n-2)(n-3)(2n-5) B v.$$

Una proprietà analoga sussiste per un'altra funzione dipendente dalla forma u e dal suo Hessiano, ed è la

$$\theta = u_{11} v_{22} + u_{22} v_{11} - 2 u_{12} v_{12},$$

per la quale ho trovato sussistere la relazione:

$$(3) \qquad (n-2)(n-3)\theta = n(n-1) B u.$$

Ciò posto, si considerino le equazioni:

$$(n-1)^2 u_2^2 = n(n-1) u u_{22} - x^2 v,$$

$$(n-1)^2 u_1 u_2 = n(n-1) u u_{12} + x y v,$$

$$(n-1)^2 u_1^2 = n(n-1) u u_{11} - y^2 v,$$

le quali si deducono dalle notissime dell'EULERO per le funzioni omogenee; e si osservi che, moltiplicandole ordinatamente per v_{11}, $-2v_{12}$, v_{22} e sommando i risultati, si ha, osservando al valore di θ,

$$(4) \quad (n-1)^2 (n-2)(n-3) V = n^2 (n-1)^2 B u^2 - 2(n-2)^2 (n-3)(2n-5) v^2,$$

essendosi posto

$$V = - \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & v_{11} & v_{12} \\ u_2 & v_{12} & v_{22} \end{vmatrix}.$$

Analogamente alle equazioni superiori si avranno le tre seguenti:

$$(2n-5)^2 v_2^2 = 2(n-2)(2n-5) v v_{22} - x^2 w,$$

$$(2n-5)^2 v_1 v_2 = 2(n-2)(2n-5) v v_{12} + x y w,$$

$$(2n-5)^2 v_1^2 = 2(n-2)(2n-5) v v_{11} - y^2 w,$$

le quali, moltiplicate ordinatamente per u_{11}, $-2u_{12}$, u_{22} e sommate, avendo riguardo al valore di θ, dànno:

$$(n-3)(2n-5)^2 U - 2n(n-1)(2n-5) B u v = - n(n-1)(n-3) u w,$$

e pel valore di w:

$$(5)\quad (n-2)(n-3)^2\,U = n(n-1)(n-2)(n-3)B\,u\,v - n^2(n-1)^2\,C\,u^2,$$

essendo

$$U = -\begin{vmatrix} 0 & v_1 & v_2 \\ v_1 & u_{11} & u_{12} \\ v_2 & u_{21} & u_{22} \end{vmatrix}.$$

Dai due gruppi di equazioni superiori deducesi anche la seguente relazione:

$$\begin{aligned}(n-1)^2(2n-5)^2\delta^2 &= 2n(n-1)(n-2)(2n-5)\,u\,v\,\theta \\ &\quad - n^2(n-1)^2u^2w - 4(n-2)^2(2n-5)^2v^3,\end{aligned}$$

nella quale

$$\delta = v_1 u_2 - v_2 u_1;$$

e pei valori di θ, w si ottiene:

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}(n-1)^2(n-2)(n-3)^2\delta^2 &= n^2(n-1)^2(n-2)(n-3)B\,u^2v \\ &\quad - n^3(n-1)^3\,C\,u^3 - 4(n-2)^3(n-3)^3v^3.\end{aligned}\right.$$

Aggiungiamo anche le seguenti due relazioni facilmente dimostrabili:

$$(2n-5)V_1 = n\,u\,w, \qquad (n-1)\,U_1 = 2(n-2)v^2,$$

essendo

$$V_1 = -\begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ v_1 & v_{11} & v_{12} \\ v_2 & v_{21} & v_{22} \end{vmatrix}, \qquad U_1 = -\begin{vmatrix} 0 & v_1 & v_2 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \\ u_2 & u_{21} & u_{22} \end{vmatrix}.$$

Si osservi che le U, V, δ pel Lemma I sono covarianti della forma u e che, supponendo nel Lemma medesimo

$$\varphi(x, y) = v, \qquad \psi(x, y) = u,$$

la formola (1), nella quale facciasi $r = 1$, dà

$$-V = u_1\frac{\partial \delta}{\partial y} - u_2\frac{\partial \delta}{\partial x} - \frac{2(n-2)}{n-1}v^2,$$

e quindi, ponendo

$$\delta_1 = u_2\frac{\partial \delta}{\partial x} - u_1\frac{\partial \delta}{\partial y},$$

si ha pel valore di V:

$$(7) \quad (n-1)^2(n-2)(n-3)\delta_1 = n^2(n-1)^2 B u^2 - 6(n-2)(n-3)v^2.$$

Si osservi che le formole trovate sussistono qualunque sia il valore di n, fuorchè per $n=2$ e per $n=3$. In quest'ultimo caso, indicando con D il discriminante della funzione stessa, si ottengono le

$$w = 36D, \qquad \theta = 0,$$

e quindi:

$$2V = -v^2, \qquad U = -6^3 D u, \qquad \delta^2 = -9.36 D u^2 - v^2.$$

22 dicembre 1855.

[G.].

XXXIV.

SOPRA UNA FORMOLA DI TRASFORMAZIONE PER LE SERIE DOPPIAMENTE INFINITE.

Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, t. VII [illegible]

1. Rappresentino $m_1, m_2, \ldots m_n$ n quantità le quali ponno assumere tutti i valori interi da $-\infty$ a $+\infty$; $p_1, p_2, \ldots p_n$; $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ $2n$ quantità eguali a zero od alla unità.

Posto:

$$h = p_1 m_1 + p_2 m_2 + \ldots + p_n m_n ,$$

$$c_s = u_s + \sum_r (2 m_r + \mu_r) a_{r,s} ,$$

$$\varphi = r_1 c_1^2 + r_2 c_2^2 + \ldots + r_n c_n^2$$

($r_1, r_2, \ldots r_n, a_{r,s}$ quantità costanti), considero la funzione ad n argomenti $u_1, u_2, \ldots u_n$ seguente:

$$e^{r_1 u_1^2 + r_2 u_2^2 + \ldots + r_n u_n^2} P(u_1, u_2, \ldots u_n) = \mathbf{S}(-1)^h e^{\varphi}, \tag{1}$$

indicando col simbolo **S** la somma di tutte le espressioni che si ottengono col dare alle $m_1, m_2, \ldots$, che entrano a formare la $(-1)^h e^{\varphi}$, tutti i valori suddetti.

Se nella equazione (1) si pone

$$u_1 + 2 a_{1,r}, \quad u_2 + 2 a_{2,r}, \quad \ldots \quad u_n + 2 a_{n,r}$$

in luogo di $u_1, u_2, \ldots u_n$, si ottiene:

$$e^{\sum_1^n (\ldots + 2 i \ldots)^2} P(u_1 + 2 a_{1,r}, u_2 + 2 a_{2,r}, \ldots u_n + 2 a_{n,r}) = (-1)^{p_r} \mathbf{S}(-1)^h e^{\varphi};$$

quindi, se $p_r = 0$, la funzione primo membro della (1) ammetterà il gruppo di indici di periodicità:

$$2 a_{1,r}, \quad 2 a_{2,r}, \quad \ldots \quad 2 a_{n,r};$$

e, se $p_r = 1$, la funzione medesima ammetterà il gruppo di indici di periodicità:

$$4 a_{1,r}, \quad 4 a_{2,r}, \quad \ldots \quad 4 a_{n,r}. \tag{2}$$

Ne risulta che la funzione (1) ammetterà gli n gruppi di indici di periodicità che si deducono dal gruppo (2) ponendo $r = 1, 2, \ldots n$.

2. La espressione del secondo membro della equazione (1) si può trasformare applicando opportunamente i metodi dati recentemente dai signori Meissel ed Enneper per trasformare espressioni di forma analoga *). Non faremo quindi che esporre il risultato.

Sia

$$\Delta = \sum (\pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n}), \qquad \alpha_{r,s} = \frac{\partial \Delta}{\partial a_{r,s}},$$

$$\gamma_s = \frac{\pi}{4} \sum_1^n (2 m_r + p_r) \alpha_{s,r} - i \Delta r_s u_s \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

$$\psi = \frac{1}{r_1} \gamma_1^2 + \frac{1}{r_2} \gamma_2^2 + \ldots + \frac{1}{r_n} \gamma_n^2,$$

$$k = m_1 \mu_1 + m_2 \mu_2 + \ldots + m_n \mu_n.$$

La formola di trasformazione è la seguente:

$$\frac{i^{\frac{n}{2}} \pi^{\frac{n}{2}}}{2^n \Delta \sqrt{r_1 r_2 \ldots r_n}} \mathbf{S}(-1)^k e^{\frac{1}{\Delta^2} \psi} = e^{\sum_1^n r_s u_s^2} \mathbf{S}(-1)^h e^{\varphi},$$

ossia, osservando alla (1),

$$P(u_1, u_2, \ldots u_n) = \frac{i^{\frac{n}{2}} \pi^{\frac{n}{2}}}{2^n \Delta \sqrt{r_1 r_2 \ldots r_n}} \mathbf{S}(-1)^k e^{\frac{1}{\Delta^2} \psi}. \tag{3}$$

---

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. XLVIII (1854), p. 324. — Quarterly Journal, vol. I (1857), p. 200.

Ora, se in questa equazione in luogo delle $u_1, u_2, \dots u_n$ si sostituiscono le

$$u_1 + 2A_{1,r}, \quad u_2 + 2A_{2,r}, \quad \dots \quad u_n + 2A_{n,r},$$

essendo

$$A_{s,r} = \frac{\pi i}{4\Delta r_r}\alpha_{r,s}, \tag{4}$$

si ottiene

$$P(u_1 + 2A_{1,r}, \ u_2 + 2A_{2,r}, \dots u_n + 2A_{n,r}) = (-1)^r P(u_1, u_2, \dots u_n).$$

Per cui le funzioni $P(u_1, u_2, \dots u_n)$ ammetteranno gli n gruppi di indici di periodicità che si deducono dal gruppo

$$4A_{1,r}, \quad 4A_{2,r}, \quad \dots \quad 4A_{n,r}$$

ponendo in esso $r = 1, 2, \dots n$.

Quindi il rapporto fra due qualsivogliano funzioni del tipo (1) ammetterà i $2n$ gruppi di indici di periodicità superiori.

3. Osservando all'equazione (4) è evidente che gli indici $A_{s,r}$ dei secondi gruppi sono dipendenti dagli indici $a_{r,s}$ dei primi. Dalla medesima equazione si possono dedurne moltissime altre, le quali manifestano il legame fra i primi e i secondi indici. Fra queste equazioni noteremo le

$$a_{r,1}A_{r,1} + a_{r,2}A_{r,2} + \dots + a_{r,n}A_{r,n} = \frac{\pi i}{4r_r},$$

$$a_{r,1}A_{s,1} + a_{r,2}A_{s,2} + \dots + a_{r,n}A_{s,n} = 0,$$

e le

$$r_1 a_{1,s}A_{1,s} + r_2 a_{2,s}A_{2,s} + \dots + r_n a_{n,s}A_{n,s} = \frac{\pi i}{4},$$

$$r_1 a_{1,s}A_{1,t} + r_2 a_{2,s}A_{2,t} + \dots + r_n a_{n,s}A_{n,t} = 0;$$

inoltre le

$$A_{r,s}\alpha_{r,s} - A_{s,r}\alpha_{s,r} = 0, \qquad r_r A_{s,r}\alpha_{r,s} - r_s A_{r,s}\alpha_{s,r} = 0;$$

e da ultimo, indicando con ∇ il determinante

$$\sum(\pm A_{1,1}A_{2,2}\dots A_{n,n}),$$

si ha:

$$\nabla = \frac{\pi^n i^n}{4^n \Delta r_1 r_2 \dots r_n}.$$

4. Da quest'ultima equazione si ottiene facilmente:

$$\sqrt{\frac{\Gamma}{\Delta}} = \frac{i^{\frac{n}{2}} \pi^{\frac{n}{2}}}{2^n \Delta \sqrt{r_1 r_2 \ldots r_n}},$$

per la quale la (3) assume la forma:

$$P(u_1, u_2, \ldots u_n) = i^{\frac{n}{2}} \sqrt{\frac{\Gamma}{\Delta}} \, \mathbf{S} (-1)^k e^{\frac{1}{\Delta^2}\psi}.$$

Si sostituiscano in ψ per $\alpha_{s,r}$ i valori dati dalla (4); si avrà:

$$\gamma = \frac{\Delta r}{i} [(2 m_1 + p_1) A_{s,1} + \ldots + (2 m_n + p_n) A_{s,n}] - i \Delta r_s u_s,$$

ossia, posto

$$i A_{r,s} = a'_{r,s}, \qquad \delta_s = \sum_1^n (2 m_r + p_r) a'_{s,r} + i u_s,$$

si otterrà:

$$\gamma = - \Delta r_s \delta_s,$$

da cui

$$\psi = \Delta^2 (r_1 \delta_1^2 + r_2 \delta_2^2 + \ldots + r_n \delta_n^2) = \Delta^2 \omega.$$

Ne risulta che

$$P(u_1, u_2, \ldots u_n) = i^{\frac{n}{2}} \sqrt{\frac{\Gamma}{\Delta}} \, \mathbf{S} (-1)^k e^{\omega}.$$

Si osservi che la ω è della stessa forma della φ, e si ottiene da questa ponendo: $i u_s$ in luogo di u_s, $a'_{r,s}$ invece di $a_{r,s}$, e $p_1, p_2, \ldots p_n$ in luogo di $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$, e reciprocamente. Indicando quindi con $P_1(u_1, u_2, \ldots u_n)$ quella fra le funzioni (1) nella quale sono permutate le $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ ordinatamente colle $p_1, p_2, \ldots p_n$, si avrà dalla (1) medesima:

$$e^{-\sum_1^n r_s u_s^2} P_1(i u_1, i u_2, \ldots i u_n, a'_{r,s}) = \mathbf{S} (-1)^k e^{\omega},$$

per cui l'equazione superiore diventa la

$$(5) \qquad P(u_1, u_2, \ldots u_n, a_{r,s}) = i^{\frac{n}{2}} \sqrt{\frac{\Gamma}{\Delta}} \, e^{-\sum_1^n r_s u_s^2} P_1(i u_1, i u_2, \ldots i u_n, a'_{r,s}).$$

Questa è la formola generale per la trasformazione delle funzioni P ad argomenti reali in funzioni delle medesime specie ad argomenti immaginarj.

5. Supponngasi

$$n = 1, \qquad a_{1,1} = \alpha, \qquad a'_{1,1} = \alpha_1, \qquad p_1 = 1, \qquad \mu_1 = 0;$$

saranno, secondo i simboli dei *Fundamenta nova*,

$$P(u) = \Theta(u), \qquad P_1(u) = H(u + K);$$

inoltre si avranno le

$$\Delta = \alpha, \qquad \nabla = A_{1,1} = \frac{\pi i}{4K'} = -i\alpha,$$

ed osservando essere

$$r = \frac{\pi}{4KK'}, \qquad \alpha = iK',$$

per cui $A_{1,1} = K$, sarà

$$\sqrt{i}\sqrt{\frac{\nabla}{\Delta}} = \sqrt{\frac{K}{K'}};$$

e dalla formola (5) deducesi:

$$\Theta(u, k) = \sqrt{\frac{K'}{K}}\, H(iu + K', k_1),$$

che equivale alla formola (16) del § 61 dei *Fundamenta nova*. Analogamente si ottengono le altre formole del medesimo paragrafo.

Sia

$$n = 2, \qquad \rho_1 = 0, \qquad \rho_2 = 1, \qquad \nu_1 = 1, \qquad \nu_2 = 0;$$

adottando la notazione di Göpel nella Memoria: *Theoriæ transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis* *), si avrà:

$$P(u_1, u_2) = Q''(u_1, u_2), \qquad P_1(u_1, u_2) = R''(u_1, u_2).$$

Pongo

$$a_{1,1} = \alpha_1, \quad a_{2,1} = \alpha_2; \qquad A_{1,1} = a_1, \quad A_{2,1} = a_2,$$

$$a_{1,2} = \beta_1, \quad a_{2,2} = \beta_2; \qquad A_{1,2} = b_1, \quad A_{2,2} = b_2;$$

sarà:

$$\Delta = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1, \qquad \nabla = a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

$$\Delta a_1 = \frac{\pi}{4r_1}\beta_2, \qquad \Delta a_2 = -\frac{\pi}{4r_2}\beta_1,$$

$$\Delta b_1 = -\frac{\pi}{4r_1}\alpha_2, \qquad \Delta b_2 = \frac{\pi}{4r_2}\alpha_1,$$

e supponendo

$$ia_1 = \alpha', \qquad ia_2 = \alpha'', \qquad ib_1 = \beta', \qquad ib_2 = \beta''$$

---

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. XXXV (1847), p. 277.

si avrà:

$$Q'(u_1, u_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = i\sqrt{\frac{\pi}{\Delta}}\, e^{-(\ldots)}\, R''(iu_1, iu_2, \alpha', \alpha'', \beta', \beta'');$$

formola analoga alla data dal ROSENHAIN al § 5, cap. 2, della sua Memoria: *Sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes, qui sont les inverses des intégrales ultraelliptiques de la première classe* [Mémoires présentés par divers savants à l'Académie de l'Institut de France, t. XI (1851), p. 361].

Pavia, maggio [illegible].

[L., G.]

XXXV.

RICERCHE ALGEBRICHE SULLE FORME BINARIE.

Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, ... VII ...

1. Sieno $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ due covarianti, rispettivamente dei gradi r, s, della forma binaria dell'ennesimo grado:

$$u = (a_0, a_1, \dots a_n)(x, y)^n .$$

I coefficienti delle potenze delle indeterminate X, Y nello sviluppo della funzione

$$(1) \qquad \varphi\left(x X - \frac{1}{s} \psi'(y) Y, \quad y X + \frac{1}{s} \psi'(x) Y\right)$$

sono tutti covarianti di u. Questa proposizione, enunciata dapprima dal sig. HERMITE nel giornale di Cambridge, venne recentemente dimostrata da questo distinto geometra nella sua seconda Memoria: *Sur la théorie des fonctions homogènes,* ecc. pubblicata nel tomo LII (1856), del giornale del sig. CRELLE. In una Nota *) inserita nel fascicolo di febbraio 1856 di questi «Annali», abbiamo trovato esistere una relazione fra i covarianti ottenuti dallo sviluppo della funzione superiore, la quale relazione, indicando lo sviluppo suddetto con

$$(z_0, z_1, \dots z_r)(X, Y)^r ,$$

*) [XXXIII, pp. 209-215 (p. 211)].

riducesi alla seguente:

$$(2) \qquad \alpha_{r+1} = \frac{1}{s(i-r)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\alpha_r}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\alpha_r}{\partial x}\right) + \frac{r(s-1)}{i-r}k\alpha_{r-1},$$

essendo

$$k = \frac{1}{s^2(s-1)^2}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \end{vmatrix}.$$

Se nella espressione (1) poniamo $\varphi = u$, e supponiamo

$$(3) \qquad u\left(xX - \frac{1}{s}\frac{\partial\psi}{\partial y}Y,\ yX + \frac{1}{s}\frac{\partial\psi}{\partial x}Y\right) = (u, \psi_1, \ldots \psi_n)(X, Y)^n,$$

i covarianti $\psi_1, \psi_2, \ldots$ vennero dal sig. HERMITE, nella Memoria citata, denominati *covarianti associati* al covariante ψ: egli ha intorno ad essi dimostrato la seguente fondamentale proposizione:

« *Qualunque covariante di u, od almeno il prodotto di esso per una potenza di ψ è una funzione razionale, intera, dei covarianti associati* ».

2. Riflettendo a questa proposizione, e precisamente alla dimostrazione di essa data dall'HERMITE, presentasi una osservazione intorno la forma di quelle funzioni razionali, intere, dei covarianti associati, dalla quale si deducono moltissime conseguenze, come vedremo nel seguito di questa Memoria.

Sia

$$\pi(x, y) = (c_0, c_1, \ldots c_p)(x, y)^p$$

un covariante di u; e supponendo

$$u(xX + x_1Y, yX + y_1Y) = (A_0, A_1, \ldots A_n)(X, Y)^n,$$

si avrà, per la definizione di covariante,

$$(xy_1 - x_1y)^\mu . \pi(xX + x_1Y, yX + y_1Y) = (C_0, C_1, \ldots C_p)(X, Y)^p,$$

essendo μ un numero intero, e le $C_0, C_1, \ldots$ essendo formate colle $A_0, A_1, \ldots$ come le $c_0, c_1, \ldots$ lo sono colle $a_0, a_1, \ldots$.

Ora, supponendo

$$x_1 = -\frac{1}{s}\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad y_1 = \frac{1}{s}\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

le $A_1, A_2, \ldots$ diventano ordinatamente i covarianti associati $\psi_1, \psi_2, \ldots$ del covariante

ψ; per cui avremo:

$$(4) \qquad \psi^{\mu}\,\pi\left(xX - \frac{1}{s}\frac{\partial\psi}{\partial y}Y,\; yX + \frac{1}{s}\frac{\partial\psi}{\partial x}Y\right) = (C_0,\, C_1,\, \ldots\, C_p)(X,\, Y)^p,$$

essendo i coefficienti C_0, C_1, ... formati coi covarianti associati $\psi = u$, ψ_1, ... come c_0, c_1, ... lo sono con a_0, a_1, ... Notisi che, ponendo

$$D_r = \frac{1}{p(p-1)\ldots(p-r+1)}\cdot\frac{1}{s^r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right)^r \pi,$$

si avrà:

$$(5) \qquad \psi^{\mu} D_r = C_r;$$

e che, indicando con m il grado di $\pi(x, y)$ rispetto ai coefficienti a_0, a_1, ... della forma u, si ha: $\mu = \frac{1}{2}(mn - p)$.

3. Dedurremo, come il primo corollario della osservazione su esposta, una proprietà dei covarianti associati alla forma proposta, i quali indicheremo con u_1, u_2, ... ponendo

$$(6) \qquad u\left(xX - \frac{1}{n}\frac{\partial u}{\partial y}Y,\; yX + \frac{1}{n}\frac{\partial u}{\partial x}Y\right) = (u_0,\, u_1,\, \ldots\, u_n)(X,\, Y)^n.$$

Sia θ_r l'invariante quadratico della forma del grado $2r$:

$$\frac{1}{n(n-1)\ldots(n-2r+1)}\left(\frac{\partial^{2r} u}{\partial x^{2r}},\; \frac{\partial^{2r} u}{\partial x^{2r-1}\partial y},\; \ldots\; \frac{\partial^{2r} u}{\partial y^{2r}}\right)(X,\, Y)^{2r};$$

esso sarà un covariante di u del grado $2(n - 2r)$ rispetto alle variabili x, y e del secondo grado rispetto ai coefficienti a_0, a_1, ... Quindi, supponendo $\pi = \theta_r$, sarà $\mu = 2r$, e la formola (5), nella quale facciasi $r = 0$, darà:

$$u^{2r}\theta_r = u_0 u_{2r} - 2r\, u_1 u_{2r-1} + \frac{2r(2r-1)}{2} u_2 u_{2r-2} - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^r \frac{1}{2}\, \frac{2r(2r-1)\ldots(r+1)}{1.2\ldots r} u_r^2.$$

Pongasi ora

$$h_r = \frac{1}{n(n-2r)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \theta_r}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \theta_r}{\partial x}\right);$$

sarà h_r un covariante di u del grado $3n - 4r - 2$ rispetto alle variabili, e di terzo grado rispetto ai coefficienti a_0, a_1, ..., e ponendo $r = 1$ nella formola (5) si avrà:

$$u^{2r}h_r = u_0 u_{2r+1} - (2r-1)u_1 u_{2r} + \frac{2r(2r-3)}{2} u_2 u_{2r-1} - \frac{2r(2r-1)(2r-5)}{2.3} u_3 u_{2r-2} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^r \frac{2r(2r-1)\ldots(r+2)}{1.2\ldots r} u_r u_{r+1}.$$

Ora dalle due serie di equazioni, le quali deduconsi dalle superiori, e che dànno i valori di $\theta_1, \theta_2, \dots \theta_{\frac{n}{2}}$ o $\theta_{\frac{n-1}{2}}$ secondo che n è pari o dispari, e di $h_1, h_2, \dots h_{\frac{n}{2}-1}$ o $h_{\frac{n-1}{2}}$ per n pari o dispari, in funzione dei covarianti associati alla forma data, si potranno dedurre i valori dei covarianti associati $u_2, u_3, \dots u_n$ in funzione dei covarianti θ, h, $u_0 = u$, $u_1 = 0$, e quindi per la proposizione dell'HERMITE si avrà il seguente teorema:

Un covariante qualunque di u, od almeno il prodotto di esso per una potenza di u, è una funzione intera e razionale dei covarianti u, θ_1, θ_2, ... h_1, h_2, ...

Ponendo nelle due formole superiori $r = 1, 2, 3, \dots$ si hanno le

$$u^2\theta_1 = u_0 u_2 - u_1^2, \quad u^3 h_1 = u_0 u_3 - u_1 u_2, \quad u^4\theta_2 = u_0 u_4 - 4u_1 u_3 + 3u_2^2, \dots,$$

dalle quali, osservando essere $u_0 = u$, $u_1 = 0$, si deducono le

$$u_2 = u\theta_1, \quad u_3 = uh_1, \quad u_4 = u(u^2\theta_2 - 3\theta_1^2), \quad u_5 = u(u^2 h_2 - 2h_1\theta_1),$$

$$u_6 = u(u^4\theta_3 - 15u^2\theta_1\theta_2 + 45\theta_1^3 + 10h_1^2),$$

$$u_7 = u(u^4 h_3 - 9u^2\theta_1 h_2 + 3\theta_1^2 h_1 + 5u^2\theta_2 h_1), \quad \text{ecc.}$$

Le prime quattro fra queste formole vennero trovate in altro modo dal sig. HERMITE nella Memoria citata.

4. È evidente che il metodo indicato nel n° precedente, per determinare i valori dei covarianti associati alla forma u in funzione dei covarianti θ, h, può estendersi alla ricerca dei valori dei covarianti associati al covariante $\psi(x, y)$, in funzione dei covarianti θ e di covarianti analoghi ad h. Ma i covarianti associati ψ_2, ψ_3, ... ponno esprimersi, mediante una formula generale, in funzione dei covarianti $u_1, u_2, u_3, \dots, \psi_1, \psi$, come ora veniamo a stabilire.

Pongasi nel primo membro della (3):

$$-\frac{1}{s}\frac{\partial\psi}{\partial y} = x_1, \qquad \frac{1}{s}\frac{\partial\psi}{\partial x} = y_1,$$

e sviluppisi quella espressione scrivendo:

$$u(x_1 Y + xX, \; y_1 Y + yX) = u(x_1, y_1)Y^n + \left(x\frac{\partial u}{\partial x_1} + y\frac{\partial u}{\partial y_1}\right)Y^{n-1}X + \dots;$$

per cui risulta:

$$(7) \qquad \psi_r = \frac{1}{n(n-1)\dots(r+1)}\left(x\frac{\partial u}{\partial x_1} + y\frac{\partial u}{\partial y_1}\right)^{(n-r)}.$$

Ciò posto, pongasi nella (6) ψ_1 e ψ in luogo di X e di Y; ed osservando essere

$$\psi_1 = \frac{1}{ns}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right), \qquad \psi = \frac{1}{s}\left(x\frac{\partial\psi}{\partial x} + y\frac{\partial\psi}{\partial y}\right),$$

si otterranno le

$$x\psi_1 - \frac{1}{n}\frac{\partial u}{\partial y}\psi = u x_1, \qquad y\psi_1 + \frac{1}{n}\frac{\partial u}{\partial x}\psi = u y_1;$$

per cui sostituendo si avrà:

$$u^m . u(x_1, y_1) = (a_0, a_1, \dots a_m)(\psi_1, \psi)^m = F(\psi_1, \psi).$$

Da questa, osservando alle superiori, si deducono le

$$\frac{\partial F}{\partial\psi_1} = u^{m-1}\left(x\frac{\partial u}{\partial x_1} + y\frac{\partial u}{\partial y_1}\right), \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial\psi_1^2} = u^{m-2}\left(x\frac{\partial u}{\partial x_1} + y\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^2, \dots$$

Dunque in causa della (7) si avrà la rimarchevole formola:

$$(8) \qquad u^r\psi_r = (a_0, a_1, \dots a_m)(\psi_1, \psi)^m.$$

Questo risultato si può anche generalizzare considerando la equazione (4) e la

$$(9) \qquad u^{\mu}.\pi\left(xX - \frac{1}{n}\frac{\partial u}{\partial y}Y,\ yX + \frac{1}{n}\frac{\partial u}{\partial x}Y\right) = (\gamma_0, \gamma_1, \dots \gamma_p)(X, Y)^p,$$

nella quale le $\gamma_0, \gamma_1, \dots$ sono formate colle $u_0, u_1, \dots$ come le $c_0, c_1, \dots$ lo sono colle $a_0, a_1, \dots$ Infatti, ponendo in quest'ultima ψ_1, ψ in luogo di X, Y, si ottiene:

$$u^{\mu+p}\pi(x_1, y_1) = (\gamma_0, \gamma_1, \dots \gamma_p)(\psi_1, \psi)^p = F(\psi_1, \psi)$$

e quindi:

$$u^{\mu}\left(x\frac{\partial\pi}{\partial x_1} + y\frac{\partial\pi}{\partial y_1}\right)^{r} = \frac{\partial^r F}{\partial\psi_1^r};$$

per cui dallo sviluppo della (4) si ha:

$$(10) \qquad u^{\mu+r} C_r = \psi^r(\gamma_0, \gamma_1, \dots \gamma_p)(\psi_1, \psi)^p.$$

Se $\pi = u$, si ha $\mu = 0$, e da questa deducesi la (8).

5. Per quanto si è osservato al n° 2 i covarianti $\gamma_0, \gamma_1, \dots$ dati dallo sviluppo della (9) saranno formati coi covarianti $u_0, u_1, \dots$ come i coefficienti $c_0, c_1, \dots$ del covariante $\pi(x, y)$ lo sono coi coefficienti $a_0, a_1, \dots$ della forma data. Ora, considerando γ_r come funzione di $u_0, u_1, \dots$, si avrà:

$$\frac{\partial\gamma_r}{\partial x} = \sum_0^m \frac{\partial\gamma_r}{\partial u_s}\frac{\partial u_s}{\partial x}, \qquad \frac{\partial\gamma_r}{\partial y} = \sum \frac{\partial\gamma_r}{\partial u_s}\frac{\partial u_s}{\partial y},$$

dalle quali:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \gamma_r}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \gamma_r}{\partial x} = \sum_0^n \frac{\partial \gamma_r}{\partial u_m}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u_m}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u_m}{\partial x}\right);$$

n.a, se nella formola (2) supponiamo dapprima $\varphi = \psi = u$ per cui $i = s = n$, $k = \theta_1$, quindi $\varphi = \pi$, $\psi = u$ ed in conseguenza $i = p$, $s = n$, $k = \theta_1$, si ottengono le due seguenti:

$$u_{m+1} = \frac{1}{n(n-m)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u_m}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u_m}{\partial x}\right) + \frac{m(n-1)}{n-m}\theta_1 u_{m-1},$$

$$\gamma_{r+1} = \frac{1}{n(p-r)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \gamma_r}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \gamma_r}{\partial x}\right) + \frac{r(n-1)}{p-r}\theta_1 \gamma_{r-1},$$

per le quali, ponendo

$$P(\gamma_r) = \sum_0^n m\, u_{m-1}\frac{\partial \gamma_r}{\partial u_m}, \qquad Q(\gamma_r) = \sum_0^n (n-m)\, u_{m+1}\frac{\partial \gamma_r}{\partial u_m},$$

si giunge alla equazione:

$$Q(\gamma_r) - (p-r)\gamma_{r+1} = (n-1)\theta_1[P(\gamma_r) - r\gamma_{r-1}],$$

per la sussistenza della quale dovranno essere:

$$Q(\gamma_r) = (p-r)\gamma_{r+1}, \qquad P(\gamma_r) = r\gamma_{r-1}.$$

La prima di queste darà i valori di γ_1, γ_2, ... allorquando sia conosciuto γ_0; e dalle medesime si ponno dedurre le equazioni caratteristiche per un covariante dovute al sig. CAYLEY; le quali vengono qui ritrovate in un modo affatto differente.

6. Determinati i valori dei covarianti associati alla forma data in funzione dei covarianti θ, h, l'applicazione del principio esposto al n° 2 dà origine ad alcune relazioni fra i covarianti di una stessa forma, le quali sono di molto utile nella ricerca dei covarianti fondamentali od irreducibili. Eccone alcuni esempi.

ESEMPIO I. — Sia δ il discriminante della forma di terzo grado:

$$\frac{1}{n(n-1)(n-2)}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)(X, Y)^3;$$

esso sarà un covariante di u di quarto grado rispetto ai coefficienti, e del grado $4(n-3)$ rispetto alle variabili, quindi fatto $\pi = \delta$ sarà $\mu = 6$ ed

$$u^6\delta = -(u_0^2 u_3^2 + 4u_0 u_2^3) = -(u^4 h_1^2 + 4u^4\theta_1^3)$$

e quindi

(11) $$[illegible]\,\delta + [illegible] + 4\,[illegible] = 0.$$

Se la forma u è di terzo grado, θ, h sono i soli due covarianti [illegible] della medesima, e δ l'unico invariante. In questo caso la formola superiore venne già trovata dal sig. CAYLEY.

ESEMPIO II. — Sia ζ l'invariante cubico della forma di quarto grado:

$$\frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}, \ldots \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)(X, Y)^4;$$

ζ sarà un covariante di u del terzo grado rispetto ai coefficienti, e del grado $3(n-4)$ rispetto alle variabili; quindi supposto $\pi = \zeta$ si ha $\mu = 6$ ed

$$[illegible]\,\zeta = \left| [illegible] \right|,$$

ossia, sostituendo e riducendo,

(12) $$u^3\zeta = [illegible]\,\theta_1\theta_2 - 4\,\theta_1^{[illegible]} - h_1^2.$$

Per $n = 4$ si ha la relazione trovata dal CAYLEY fra i covarianti θ_1, h_1 e gli invarianti quadratico e cubico θ_2, ζ della forma di quarto grado (*vedi* anche la prima delle Memorie dell'HERMITE nel tomo LII del giornale di CRELLE). Dalle equazioni (11), (12) si ottiene anche la

$$[illegible]\,\zeta = \theta_1\theta_2 + \delta.$$

ESEMPIO III. — Sia

$$\rho = \frac{1}{n(n-4)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right);$$

ponendo $r = 1$ nella (5) si ha:

$$[illegible]\,\rho = \begin{vmatrix} u & u_1 & u \\ u_1 & [illegible] & u \\ u_2 & u_3 & [illegible] \end{vmatrix},$$

o, sostituendo e riducendo,

(13) $$u\rho = \theta_1 h_2 - \theta_2 h_1.$$

ESEMPIO IV. — Sia

$$\sigma = \frac{1}{n^2(n-4)(3n-13)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\zeta;$$

ponendo $r = 2$ nella (5), e supponendo $n = 5$, si ha:

$$u^4\sigma = \begin{vmatrix} u_0 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_3 & u_4 \\ u_2 & u_4 & u_5 \end{vmatrix},$$

per cui:

$$u^3\sigma = u^2 h_1 h_2 - 3\,\theta_1 h_1^2 + 7\,u^2\theta_1^2\theta_2 - 12\,\theta_1^4 - u^4\theta_2^2,$$

la quale, in causa della (12), può ridursi alla

$$(14) \qquad u\sigma = h_1 h_2 - u^2\theta_2^2 + 4\,\theta_1^2\theta_2 + 3\,u\theta_1\zeta.$$

Esempio V. — Sia γ l'invariante di quarto grado della forma di quinto grado

$$\frac{1}{n(n-1)\ldots(n-4)}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}, \ldots \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)(X, Y)^4;$$

sarà γ un covariante di u di quarto grado rispetto ai coefficienti, e di grado $4(n-5)$ rispetto alle variabili; quindi fatto $\pi = \gamma$ sarà $\mu = 10$ ed

$$u^4\gamma = 12\,h_1^2\theta_2 - 16\,u^2\theta_1\theta_2^2 + 48\,\theta_1^3\theta_2 - u^2 h_2^2$$

ed anche, per la (12),

$$(15) \qquad u^2\gamma + h_2^2 + 4\,\theta_1\theta_2^2 + 12\,u\zeta\theta_2 = 0.$$

Analogamente, indicando con β l'invariante di ottavo grado della medesima forma di quinto grado, si ottiene la

$$(16) \quad 9\,u^2\beta = (3\,\theta_1\zeta+\sigma)(h_2\rho-2\,\theta_2\sigma)-(2\,\theta_1\rho-3\,h_1\zeta)(2\,\theta_2\rho-3\,h_2\zeta)+6\,u\zeta(\rho^2-3\,\zeta\sigma).$$

Per $n = 5$ le (15), (16) sono relazioni fra i covarianti θ_1, θ_2, h_1, h_2, ζ, ρ, σ rispettivamente dei gradi 6, 2, 9, 5, 3, 6, 9, e gli invarianti γ, β del quarto e dell'ottavo grado.

Le conseguenze dedotte dai sigg. Cayley ed Hermite dalle relazioni (11), (12) per la teoria algebrica ed aritmetica delle forme cubiche e biquadratiche dinotano l'importanza delle relazioni di questa specie. Vediamo anche come esse tornino utili nella ricerca dei covarianti associati ad un covariante dato.

7. Se nella formola (8) supponiamo $\psi = \theta_1$, si ha evidentemente $\psi_1 = -\frac{1}{2}\,h_1$, quindi fatto $r = 2$ si ottiene:

$$u^2\psi_2 = -\frac{1}{4}\,u h_1^2 + u_2\theta_1^2;$$

e per le (11), (12):

$$\psi_2 = -\frac{1}{4}\,u\delta = -\frac{1}{4}\,u(\theta_1\theta_2 - u\zeta).$$

Così:

$$u^3\psi_3 = (u_0, u_1, u_2, u_3)\left(-\frac{1}{2}\,h_1, \theta_1\right)^3,$$

ossia:

$$\psi = [illegible] \delta = - [illegible] - [illegible] .$$

Analogamente si ha:

$$\psi = \theta\, \zeta + [illegible] \zeta - \theta_1 [illegible] .$$

Quindi per le forme di terzo e quarto grado i covarianti associati al covariante θ_1 sono funzioni intere e razionali dei covarianti irreducibili u, θ_1, h_1; risultato già ottenuto dal sig. HERMITE.

Continuando abbiamo:

$$u\psi = ([illegible] , \ldots [illegible] - [illegible] , \theta) ,$$

ossia, sviluppando ed osservando alle (11), (12), (13), si ha:

$$u\psi_2 = [illegible]\, \theta_2 (2\theta [illegible] - 3 [illegible] \zeta) - [illegible] \delta .$$

Ora, se nella formola (10) poniamo [illegible], [illegible], si ha:

$$\psi_1 = - [illegible] h_1 , \qquad [illegible] = \theta ,$$

e per $r = 1$ si ottiene:

$$[illegible]\, C_1 = \theta_2 (- [illegible] \gamma_1 - \theta_2 \gamma_1);$$

e per le (11), (12) essendo

$$\gamma_1 = [illegible] \zeta , \qquad \gamma_1 = \frac{1}{4} u \varphi ,$$

si ha:

$$6\, u\, C_1 = \theta (2 \varphi \theta - 3 \zeta [illegible]);$$

per cui, indicando con λ_1 il covariante della forma u:

$$\frac{1}{(n-2)(n-4)} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)$$

di quinto grado rispetto ai coefficienti, e di grado $5\,n - 18$ rispetto alle variabili, si ha per la (5):

$$u \lambda_1 = 2 \varphi \theta_2 - 3 \zeta h_2 ,$$

per la quale:

$$\psi_3 = \frac{1}{2} \theta_1 \lambda_1 - \frac{1}{2} h_2 \delta .$$

Quindi per la forma di quinto grado i covarianti associati al covariante θ_1 sono funzioni intere e razionali dei covarianti irreducibili u, θ_1, h_1, θ_2, ζ, λ_1 rispettivamente dei gradi 5, 6, 9, 2, 3, 7 rispetto alle variabili, e dei gradi 1, 2, 3, 2, 3, 5 rispetto ai coefficienti.

Pavia, 10 agosto 1856.

[G.].

XXXVI.

SUL PRINCIPIO DI RECIPROCITÀ NELLA TEORIA DELLE FORME.

Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, t. VII [illegible]

1. Eulero, nelle sue ricerche sulla partizione dei numeri, ha dimostrato che il numero dei modi, in cui un numero s può essere formato da una somma di r termini della serie 0, 1, 2, ... n (supponendo che ciascun elemento possa essere ripetuto un infinito numero di volte), è eguale al coefficiente di $x^s z^r$ nello sviluppo della espressione:

$$(1)\qquad Z = \frac{1}{(1 - z)(1 - xz)\dots(1 - x^n z)}.$$

Supponiamo

$$Z = 1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots;$$

cambiando la z in xz si ha:

$$(1 - z)Z = (1 - x^{n+1} z)(1 + A_1 xz + A_2 x^2 z^2 + \dots),$$

per la quale

$$A_r(1 - x^r) = A_{r-1}(1 - x^{n+r})$$

e quindi

$$(2)\qquad A_r = \frac{(1 - x^{n+1})(1 - x^{n+2})\dots(1 - x^{n+r})}{(1 - x)(1 - x^2)\dots(1 - x^r)} = \psi(x).$$

Suppongasi

$$\psi(x) = 1 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots;$$

si avrà:

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = \frac{C_1 + 2 C_2 x + 3 C_3 x^2 + \dots}{1 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots},$$

ed indicando con $f(x)$, $\varphi(x)$ il numeratore ed il denominatore di $\psi(x)$ si avrà anche:

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}.$$

Siano α_1, α_2, ... le radici dell'equazione $f(x) = 0$, e β_1, β_2, ... quelle della $\varphi(x) = 0$; pongasi

$$s_m = \frac{1}{\beta_1^m} + \frac{1}{\beta_2^m} + \dots - \frac{1}{\alpha_1^m} - \frac{1}{\alpha_2^m} - \dots;$$

si otterrà:

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = s_1 + s_2 x + s_3 x^2 + \dots,$$

il quale valore posto a confronto col superiore dà luogo alle

$$C_1 = s_1,$$

$$2C_2 = C_1 s_1 + s_2,$$

$$3C_3 = C_2 s_1 + C_1 s_2 + s_3,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$

dalle quali si dedurrà:

$$C_i = \frac{1}{\Gamma(i+1)} \begin{vmatrix} s_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & -2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i-1} & s_{i-2} & s_{i-3} & \dots & -(i-1) \\ s_i & s_{i-1} & s_{i-2} & \dots & s_1 \end{vmatrix}.$$

Rappresenti $E\left(\frac{h}{k}\right)$ una quantità che è nulla, se h non è divisibile esattamente per k, ed è eguale a k nel caso contrario; rammentando le note proprietà delle radici delle equazioni binomie, si troverà facilmente che:

$$s_m = 1 + E\left(\frac{m}{2}\right) + E\left(\frac{m}{3}\right) + \dots + E\left(\frac{m}{r}\right) - E\left(\frac{m}{n+1}\right)$$

$$- E\left(\frac{m}{n+2}\right) - \dots - E\left(\frac{m}{n+r}\right);$$

per mezzo della quale si otterranno ad un tratto i valori numerici delle s_1, s_2, ...

Si osservi che il valore (2) di $\psi(x)$ si può anche porre sotto la forma:

$$\psi(x) = \frac{(1 - x^{r+1})(1 - x^{r+2}) \dots (1 - x^{r+n})}{(1 - x)(1 - x^2) \dots (1 - x^n)},$$

e siccome evidentemente questa espressione sarebbe il coefficiente di z^n nello sviluppo della

$$\frac{1}{(1 - x)(1 - xz)\ldots(1 - xz)},$$

siamo condotti al seguente

Teorema I. — *Il numero dei modi in cui un numero s può essere formato da una somma di r termini della serie* 0, 1, 2, ... *n è eguale al numero dei modi in cui il medesimo numero può essere formato dalla somma di n termini della serie* 0, 1, 2, ... *r*.

2. Vogliasi ora mediante gli elementi a_0, a_1, ... a_n formare una funzione omogenea del grado r ed omogenea in indice dell'ordine s. Il numero dei termini di quella funzione sarà eguale al numero dei modi nei quali il numero s può essere formato da una somma di r elementi, ripetuti o no, della serie 0, 1, 2, ... n; e quindi pel teorema superiore ne risulta il

Teorema II. — *Una forma di grado r ed omogenea in indice dell'ordine s composta cogli elementi* a_0, a_1, ... a_n *consta di un numero di termini eguale a quello dei termini di una forma di grado n, omogenea in indice dell'ordine s e composta cogli elementi* a_0, a_1, ... a_r.

La proprietà contenuta in questo teorema è quella che denominiamo *principio di reciprocità delle forme*. Per esempio, considerando l'equazione del quarto grado:

$$a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0,$$

ed indicando con x_1, x_2, x_3, x_4 le radici, è noto che la funzione simmetrica $\sum x_1^3 x_2^2 x_3$ sarà del terzo grado ed omogenea in indice del sesto ordine; si avrà quindi:

$$s_m = 1 + E\left(\frac{m}{2}\right) + E\left(\frac{m}{3}\right) - E\left(\frac{m}{5}\right) - E\left(\frac{m}{6}\right) - E\left(\frac{m}{7}\right),$$

per cui:

$$s_1 = 1,\quad s_2 = 3,\quad s_3 = 4,\quad s_4 = 3,\quad s_5 = 4,\quad s_6 = 0$$

e

$$C = 5,$$

cioè il numero dei termini della funzione dei coefficienti equivalente a quella funzione simmetrica sarà cinque. Quindi, pel principio di reciprocità sarà pure cinque il numero dei termini della funzione dei coefficienti equivalente alla funzione simmetrica $\sum x_1^4 x_2^2$ formata colle radici x_1, x_2, x_3 della equazione del terzo grado:

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0.$$

3. Supponiamo che la forma di grado r ed omogenea in indice dell'ordine s debba

soddisfare all'equazione

$$(3) \qquad a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2 a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + \dots + n a_{n-1} \frac{\partial}{\partial a_n} = 0 .$$

Questa servirà a determinare un certo numero di coefficienti numerici della forma medesima; il qual numero sarà evidentemente eguale al numero dei termini che si ottengono operando, sulla forma che si considera, col primo membro dell'equazione superiore. Ma la funzione risultante da questa operazione sarà omogenea di grado r, omogenea in indice dell'ordine $s - 1$, per cui il numero dei termini della medesima sarà C_{s-1}, ed il numero dei coefficienti che rimangono indeterminati nella formola che si considera sarà:

$$H_s = C_s - C_{s-1} .$$

Se a quei coefficienti indeterminati si dànno dei valori arbitrarj, si potranno ottenere moltissime forme differenti fra loro; ma evidentemente di queste non saranno indipendenti che un numero H_s, essendo le altre legate ad esse per mezzo di equazioni lineari a coefficienti numerici. Questa importante osservazione è dovuta al sig. CAYLEY.

Il valore di H_s si può ottenere senza calcolare a parte i valori di C_s e C_{s-1}; osservando che C_{s-1} è il coefficiente di $x^{s-1} z^r$ nello sviluppo della (1), oppure il coefficiente di $x^s z^r$ nello sviluppo della espressione

$$\frac{x}{(1 - z)(1 - xz) \dots (1 - x^m z)},$$

e quindi sarà H_s il coefficiente di $x^s z^r$ nello sviluppo di

$$\frac{1 - x}{(1 - z)(1 - xz) \dots (1 - x^m z)},$$

per cui, ponendo

$$(4) \quad \begin{cases} p_r = E\left(\frac{m}{2}\right) + E\left(\frac{m}{3}\right) + \dots + E\left(\frac{m}{r}\right) - E\left(\frac{m}{n+1}\right) \\ \qquad - E\left(\frac{m}{n+2}\right) - \dots - E\left(\frac{m}{n+r}\right), \end{cases}$$

si avrà:

$$H_s = C_s - C_{s-1} = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \begin{vmatrix} p_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ p_2 & p_1 & -2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{s-1} & p_{s-2} & p_{s-3} & \dots & -(s-1) \\ p_s & p_{s-1} & p_{s-2} & \dots & p_1 \end{vmatrix} .$$

Si consideri ora una forma di grado n ed omogenea in indice dell'ordine s, la quale

soddisfi all'equazione:

$$a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2 a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + \dots + n a_{n-1} \frac{\partial}{\partial a_n} = 0.$$

Pel principio di reciprocità sarà C_{s-1} il numero dei termini della funzione risultante dall'operare col simbolo superiore sulla forma che si considera; e quindi sarà H_s il numero delle forme di questa specie indipendenti fra loro.

4. Le forme conosciute che soddisfano all'equazione superiore sono gli invarianti, i coefficienti della equazione ai quadrati delle differenze delle radici di una equazione qualsivoglia, ed il primo coefficiente di un covariante qualunque. Per un invariante di grado r di una forma dell'ennesimo grado si ha: $s = \frac{1}{2} n r$, per cui il valore di s non cambia permutando le r, n. Pel principio di reciprocità si avrà quindi che ad ogni invariante di grado r della forma dell'ennesimo grado corrisponde un invariante di grado n della forma dell'erresimo grado.

Pel primo termine di un covariante di grado r rispetto ai coefficienti, e di grado m rispetto alle variabili della forma dell'ennesimo grado, si ha $s = \frac{1}{2}(n r - m)$, il quale valore non muta permutando le r, n. Ora un covariante è determinato allorquando se ne conosca il primo termine ed il grado rispetto alle variabili; quindi pel principio di reciprocità ad ogni covariante della forma dell'ennesimo grado, di grado r rispetto ai coefficienti e di grado m rispetto alle variabili, corrisponde un covariante della forma dell'erresimo grado, di grado n rispetto ai coefficienti e del grado m rispetto alle variabili. Questa proprietà degli invarianti e dei covarianti costituisce la *legge di reciprocità* scoperta dai sigg. SYLVESTER ed HERMITE; essa è manifestamente una conseguenza del principio di reciprocità.

5. Consideriamo una funzione qualsivoglia, di grado r e di indice s, dei coefficienti a_0, a_1, ... a_n della forma $f(x, y)$, e suppongasi di avere espressa la funzione medesima per le radici della $f(x, 1) = 0$; domandasi quale sarà il massimo numero di funzioni simmetriche delle radici che entreranno a comporre quella funzione. A ciò rammentiamo: 1° che il grado di ciascuna funzione simmetrica sarà eguale ad s; 2° che in ciascuna funzione simmetrica le radici non dovranno essere affette da esponente maggiore di r. È quindi evidente che la quistione superiore equivale al ricercare in quanti modi il numero s può essere formato dalla somma di n elementi, uguali o disuguali, della serie 0, 1, 2, ... r. Sarà quindi questo numero eguale a C_s, cioè al numero dei termini della funzione che si considera. Supponiamo che questa funzione sia fra quelle che soddisfano la equazione (3); espressa mediante le radici di x_1, x_2, ... x_n della $f(x, 1) = 0$

dovrà soddisfare la

$$\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} = 0,$$

la quale varrà a determinare un numero C_{s-1} di coefficienti numerici, per cui ne rimarranno H_s indeterminati. Dunque, allorquando si suppone essere il massimo il numero delle funzioni simmetriche che entrano a formare quella funzione, si ottengono H_s funzioni delle radici indipendenti tra loro; ma d'altra parte sappiamo che questo appunto deve essere il numero delle forme indipendenti di grado r e di indice s per una forma binaria dell'ennesimo grado; quindi si avrà il seguente

TEOREMA III. — *Se una forma dei coefficienti della $f(x, y)$, la quale soddisfi all'equazione (3), si esprime in funzione delle radici della $f(x, 1) = 0$, il numero delle funzioni simmetriche che entrano a comporla è eguale al numero dei termini della forma medesima.*

Pongasi ora:

$$(5) \qquad a_0^n \,.\, \text{Norma}\,(X_0 + x_1 X_1 + x_1^2 X_2 + \dots + x_1^r X_r) = (a_0 X_0 + a_1 X_1 + \dots + a_r X_r)^n;$$

è evidente che alla funzione simmetrica del primo membro $\sum x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots$ corrisponde nel secondo membro il monomio $a_{s_1}^{r_1} a_{s_2}^{r_2} \dots$, di cui l'indice è eguale al grado della funzione simmetrica, ed è dell'ennesimo grado. Ciò posto, consideriamo un invariante di grado r e di indice s della forma dell'ennesimo grado $f(x, y)$; supponiamo che il medesimo venga espresso in funzione delle radici della $f(x, 1) = 0$, ed in luogo delle varie funzioni simmetriche che lo compongono, si sostituiscano le espressioni corrispondenti date dal secondo membro della (5); si otterrà una nuova funzione dei coefficienti $a_0, a_1, a_2, \dots a_r$, di grado n, di indice s, e composta di un numero di termini eguale a quello dell'invariante che si considera. Questa nuova funzione sarà per la legge di reciprocità un invariante di grado n e di indice s della forma binaria dell'erresimo grado. Una analoga proprietà vale pei covarianti. Per esempio, sia Δ il discriminante della forma del terzo grado:

$$(a_0, a_1, a_2, a_3)(x, y)^3$$

e φ il suo coefficiente quadratico. Il coefficiente del primo termine del covariante $\Delta.\varphi$ è

$$\Delta \,.\, (a_0 a_2 - a_1^2),$$

la quale forma, espressa in funzione delle radici x_1, x_2, x_3, dà

$$243\,\Delta \,.\, (a_0 a_2 - a_1^2)$$

$$= a_0^6 \Big[2 \sum x_1 x_2 x_3 + 3 \sum x_1^2 x_2 + 6 \sum x_1^2 x_2^2 x_3 - 4 \sum x_1^3 x_2^2 x_3 + \sum x_1^4 x_2^2 x_3$$
$$- 3 \sum x_1 x_2 x_3 - 4 \sum x_1^3 x_2 - \sum x_1^4 x_2^2 \Big].$$

Si formi ora la espressione:

$$a^6 \,.\, \text{Norma}\,(X_0 + x_1 X_1 + \ldots + x_1^6 X_6) = (a_0 X_0 + a_1 X_1 + \ldots + a_6 X_6)$$

e dal confronto dei coefficienti delle medesime potenze delle X_0, X_1, ... nei due membri di questa equazione si hanno le

$$a^2 \sum x_1^2 x_2 x_3 = 3\, a_2^2 a\,, \quad a \sum x_1 x_2 = 6\, a\, a\, a\,, \quad \ldots\,,$$

per cui sostituendo si otterrà:

$$12\,(a_1^2 a_6 + 3\, a_1 a_3 a + 3\, a_2^2 a_2 - 2\, a_2 a^2 + a_1 a\, a - 3\, a\, a\, a - 2\, a\, a_3^2 - a\, a\, a_1),$$

la quale espressione è il coefficiente del primo termine del covariante quadratico della forma di sesto grado come abbiamo trovato in altra occasione. Il metodo suesposto di applicare la legge di reciprocità è dovuto al sig. HERMITE « The Cambridge and Dublin Mathematical Journal », v. IX (1854), p. 172.

6. I coefficienti dell'equazione ai quadrati delle differenze delle radici di una equazione qualsivoglia, soddisfacendo all'equazione (3), saranno composti di forme che vi soddisfano, le quali saranno o invarianti o coefficienti di primi termini di covarianti. Il numero H_s, rappresentando il numero dei coefficienti numerici che rimangono indeterminati, sarà il numero di quelle forme che entrano a comporre il coefficiente di un determinato termine. Ora abbiamo dimostrato nella Nota: « *Sul discriminante delle funzioni omogenee* », ecc. *) che il valore di s pel coefficiente dell'$(i+1)$-esimo termine è $2i$; e che il valore di r è 2, 4, 6, ... $2(n-1)$ pei coefficienti dei termini secondo, terzo, ... ennesimo, ed è $2(n-1)$ per tutti gli altri. Ne risulta che per i non $> n-1$ il numero di quelle forme sarà eguale ad H_{2i} purchè nell'espressione (4) facciasi $r = 2i$, e per $i \geq n-1$ il numero di quelle forme sarà H_{2i} posto $r = 2(n-1)$ nell'espressione (4). Notisi che per $2i < n$ dovrebbesi nella formola (4) porre $2i$ in luogo di n, ma siccome in questo caso i termini negativi della formola stessa non influiscono sul valore di H_{2i} si potrà far uso di essa senza variazione.

I coefficienti della risolvente di LAGRANGE per una equazione di grado n, numero primo, sono pure omogenei, omogenei in indice e soddisfano all'equazione (3). Il coefficiente del termine $(i+1)$-esimo, essendo del grado ni, omogeneo in indice dell'ordine ni, il numero delle forme che comporranno il coefficiente medesimo sarà H_{ni},

---

*) [XXX, pp. 195-202].

ponendo nella (4) $r = ni$, per cui si potrà assumere:

$$p_1 = E\left(\frac{m}{2}\right) + E\left(\frac{m}{3}\right) + \cdots + E\left(\frac{m}{n}\right).$$

Queste forme saranno tutte coefficienti di primi termini di covarianti della forma di grado n; cioè saranno i coefficienti dei primi termini dei covarianti di grado ni rispetto ai coefficienti e di grado $ni(n-2)$ rispetto alle variabili della forma medesima.

Settembre 1856.

[G.].

XXXVII.

SULLA PARTIZIONE DEI NUMERI.

Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, tomo VIII (1857), pp. 5-12

1. Uno dei più importanti problemi nella teoria della partizione dei numeri è il seguente:

Dati i numeri interi, positivi a_1, $a_2, \ldots a_r$, n, determinare il numero delle soluzioni intere, positive, della equazione:

$$(1) \qquad a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_r x_r = n.$$

Indicando con $S_{r,n}$ il numero cercato, è manifesto che il numero delle soluzioni positive, intere, delle equazioni che si ottengono dalla superiore ponendo $x_r = 0, 1, 2, \ldots$, saranno ordinatamente:

$$S_{r-1,n}, \qquad S_{r-1,n-a_r}, \qquad S_{r-1,n-2a_r}, \qquad \ldots$$

e che si avrà:

$$S_{r,n} = S_{r-1,n} + S_{r-1,n-a_r} + S_{r-1,n-2a_r} + \ldots,$$

ossia:

$$(2) \qquad S_{r,n} = S_{r-1,n} + S_{r,n-a_r};$$

e quindi il numero delle soluzioni richiesto verrà dato dall'integrazione di quest'ultima equazione alle differenze finite.

La integrazione delle equazioni alle differenze finite di questa specie forma lo scopo di una Memoria dell'insigne geometra Pietro Paoli pubblicata nel volume II (1784), p. 787, delle « Memorie della Società Italiana »; nella quale Memoria trovasi applicato il

metodo generale all'integrazione di alcune equazioni che hanno origine da varj problemi sulla partizione dei numeri. Nel caso particolare dell'equazione (2) l'Autore giunge ad un risultato che può ridursi al seguente:

Il numero $S_{r,n}$, cioè il numero delle soluzioni positive, intere, della equazione (1), è eguale al coefficiente di x^n nello sviluppo secondo le potenze ascendenti di x della espressione:

$$\frac{1}{(1-x^{a_1})(1-x^{a_2})\dots(1-x^{a_r})}, \tag{3}$$

2. Il problema suesposto sulla partizione dei numeri è quindi ridotto a quello di determinare una espressione analitica pel coefficiente di x^n in quello sviluppo, la quale sia facilmente calcolabile nei casi particolari. La soluzione di questo problema, pubblicata dal sig. SYLVESTER nel « Quarterly Journal » ed a cui si riferisce la nota del prof. TORTOLINI alla pag. 400 del t. VII (1856) di questi « Annali », raggiunge a mio credere completamente lo scopo; oltre al costituire per sè stessa un interessantissimo risultato analitico.

Indicando con $f(x)$ il denominatore della espressione (3), sieno $x_1, x_2, \dots x_m$ le radici semplici o multiple della equazione $f(x) = 0$. Avremo, nella notazione del calcolo dei residui,

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_1^m \mathcal{E} \frac{z - x_s}{(x - z) \left(\left(f(z) \right)\right)_{(z - x_s)}};$$

e denominando N il coefficiente di x^n nello sviluppo della (3), si avrà:

$$N = -\sum_1^m \mathcal{E} \frac{z - x_s}{z^{n+1} \left(\left(f(z) \right)\right)_{(z - x_s)}}.$$

Posto ora $z = \psi(t)$, ed indicato con t_s il valore di t corrispondente a $z = x_s$ (che supporremo unico), si ha per una formola dovuta al sig. CAUCHY [*Exercices de Mathématiques*, t. I, p. 173 (41)], che la espressione superiore si trasforma nella seguente:

$$N = -\sum_1^m \mathcal{E} \frac{(t - t_s)\psi'(t)}{\psi(t)^{n+1} \left(\left(f(\psi(t)) \right)\right)_{(t - t_s)}};$$

e supponendo

$$\psi(t) = x_s e^t,$$

si avrà:

$$N = -\sum_1^m \mathcal{E} \frac{(t - t_s) e^{-nt}}{x_s^n \left(\left(f(x_s e^t) \right)\right)_{(t - t_s)}}, \tag{4}$$

nella quale deve osservarsi essere $t_s = 0$.

Notisi che, indicando con y una quantità la quale sostituita in luogo di x non

renda $f(x)=0$ ed indicando con $\theta=0$ il valore di t dedotto dall'equazione $x=ye^{-t}$, il residuo

$$\mathcal{E}\frac{(t-\theta)e^{mt}}{y^m f(ye^{-t})((t-\theta))}$$

è eguale a zero, giacchè la funzione

$$\frac{e^{mt}}{y^m f(ye^{-t})}$$

non diventa infinita per $t=\theta=0$.

3. Questa nota osservazione è in questo caso particolare della più grande importanza. Infatti, se supponiamo che y sia una radice primitiva di una delle equazioni:

(5) $$y-1=0,\qquad y^2-1=0,\qquad y^3-1=0,\qquad \ldots$$

potremo porre:

(6) $$N=\mathbf{S}\,\mathcal{E}\frac{(t-\theta)e^{mt}}{y^m f(ye^{-t})((t-\theta))},$$

[indicando col simbolo **S** la somma di tutti i residui che si ottengono ponendo in luogo di y tutte le radici primitive delle equazioni (5)]; poichè fra questi residui saranno nulli tutti quelli corrispondenti a valori di y i quali non coincidono con qualcuna delle radici $x_1, x_2, \ldots x_n$ della equazione $f(x)=0$; ed inoltre queste radici si troveranno fra le radici primitive delle equazioni (5). Abbiamo quindi il seguente:

TEOREMA.—*Indicando con $y_1, y_2, \ldots y_\rho$ le radici primitive dell'equazione $y^m-1=0$ e con W_m il coefficiente di $\frac{1}{t}$ nello sviluppo della espressione*

$$H=\sum_1^\rho\frac{y_i^{-m}e^{mt}}{(1-y_i^{a_1}e^{-a_1t})(1-y_i^{a_2}e^{-a_2t})\ldots(1-y_i^{a_r}e^{-a_rt})},$$

il numero delle soluzioni positive, intere, della equazione (1) *è eguale a*

$$W_1+W_2+W_3+\ldots\ ^{*)}$$

4. Nel determinare il coefficiente di W_m nei casi particolari converrà distinguere fra i numeri $a_1, a_2, \ldots a_r$ quelli che sono esattamente divisibili per m e quelli che non lo sono. Se con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$ si indicano i primi e con $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\nu$ i secondi,

*) Questo è il teorema enunciato dal sig. SYLVESTER nel «Quarterly Journal», v. I (1857), p. 141; il metodo con cui questo distinto geometra giunse a tale risultato sembra affatto differente dal superiore; ci lusinghiamo di vederlo presto pubblicato. L'uso del calcolo dei residui in questa questione era già stato fatto avvertire al sig. SYLVESTER dai sigg. TERQUEM e CAYLEY.

Per esempio, per $n = 8$ si ha:

$$W'_1 = \frac{199}{72}, \qquad W'_2 = \frac{1}{8}, \qquad W'_3 = \frac{1}{9}, \qquad W'_5 = 0$$

ed il numero delle soluzioni è 3. Per $n = 30$ si ha:

$$W'_1 = \frac{7331}{360}, \qquad W'_2 = \frac{1}{8}, \qquad W'_3 = \frac{1}{9}, \qquad W'_5 = \frac{2}{5}$$

ed il numero delle soluzioni è 21.

È senza dubbio uno dei principali pregi di questo metodo il non aumentarsi del numero delle operazioni occorrenti per determinare il numero delle soluzioni, aumentando la grandezza del numero n.

Pavia, febbrajo 1857.

[L.].

XXXVIII.

SULLA TRASFORMAZIONE DELLE FUNZIONI ELLITTICHE.

Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, [illegible]

1. Il problema della trasformazione delle funzioni ellittiche, forse il principale nella teorica di questi trascendenti, formò ripetutamente soggetto, sotto punti di vista differenti, alle ricerche degli insigni geometri ABEL, JACOBI, EISENSTEIN, HERMITE, ROSENHAIN. In una delle lettere indirizzate dal sig. HERMITE a JACOBI, e pubblicate nella raccolta dei lavori di quest'ultimo, trovasi risoluto questo problema (oltre a quello della divisione) partendo dalle proprietà delle serie doppiamente infinite, da rapporti delle quali si esprimono le funzioni inverse degli integrali ellittici. Nelle due recenti ricerche sulla trasformazione delle funzioni abeliane di prima specie, il sig. HERMITE, oltre al giovarsi delle proprietà di queste serie, introdusse nella quistione un nuovo importantissimo elemento coll'osservare, che il problema della trasformazione consistendo nell'esprimere funzioni inverse, di moduli differenti razionalmente le une per le altre, dovevano gli indici di periodicità delle prime essere funzioni lineari a coefficienti interi degli indici di periodicità delle seconde. Assumendo questa proprietà quale fondamento abbiamo in questa Nota applicato il metodo del sig. HERMITE alla trasformazione delle funzioni ellittiche; e ciò, non solo allo scopo di mostrare con quanta semplicità si giunga alle note formole di JACOBI o di ABEL, ma ben anco, e principalmente, per aprirci la via a contemplare la soluzione dell'analogo problema per le funzioni abeliane.

2. Considerando la serie doppiamente infinita

(1) $$P(u) = \sum (-1)^{\dots}$$ [illegible]

nella quale p, μ sono eguali a zero od all'unità, ed m assume tutti i valori numerici interi da $-\infty$ a $+\infty$, si hanno, come è noto, le

$$P(u+2a) = (-1)^p e^{-4ra(u+a)} P(u), \qquad P(u+2b) = (-1)^\mu P(u)$$

essendo $b = \frac{i\pi}{4ar}$. Pongasi:

$$v = \frac{2rua}{i\pi}, \qquad c = \frac{4ra^2}{i\pi} = \frac{a}{b};$$

la (1) si trasformerà nella

$$\Theta(v) = \sum^m (-1)^{mp} e^{i\pi(2m+\mu)v + \frac{i\pi}{4}(2m+\mu)^2 c}, \tag{2}$$

per la quale analogamente alle superiori si avranno le

$$\Theta(v+1) = (-1)^\mu \Theta(v), \quad \Theta(v+c) = (-1)^p e^{-i\pi(2v+c)} \Theta(v), \tag{3}$$

alle quali possiamo aggiungere la

$$\Theta(-v) = (-1)^{\mu p} \Theta(v).$$

Così, indicando con $Q(u)$ la serie doppiamente infinita

$$\sum^m (-1)^{mq} e^{(2m+\nu)\rho\alpha[2u+(2m+\nu)\alpha]}$$

e ponendo

$$\beta = \frac{i\pi}{4\alpha\rho}, \qquad v = \frac{2\rho u\alpha}{i\pi}, \qquad \gamma = \frac{4\rho\alpha^2}{i\pi} = \frac{\alpha}{\beta},$$

ottiensi la trasformata:

$$\theta(v) = \sum^m (-1)^{mq} e^{i\pi(2m+\nu)v + \frac{i\pi}{4}(2m+\nu)^2\gamma}, \tag{4}$$

per la quale sussisteranno le

$$\theta(v+1) = (-1)^\nu \theta(v), \quad \theta(v+\gamma) = (-1)^q e^{-i\pi(2v+\gamma)} \theta(v), \quad \theta(-v) = (-1)^{\nu q} \theta(v). \tag{5}$$

Ora, se voglionsi esprimere le funzioni $P(u)$ razionalmente per le $Q(u)$, dovranno necessariamente aver luogo le relazioni lineari a coefficienti interi:

$$\alpha = a_1 a + b_1 b,$$

$$\beta = a_2 a + b_2 b;$$

e quindi:

$$\gamma = \frac{a_1 c + b_1}{a_2 c + b_2}. \tag{6}$$

3. Si consideri una funzione $\Pi(v)$ definita dalle seguenti equazioni:

(7) $\Pi(v+1)=(-1)^{\delta}\Pi(v),\quad \Pi(v+\tau)=(-1)^{h}e^{[illegible]}\Pi(v),\quad \Pi([illegible]v)=(-1)^{[illegible]}\Pi(v),$

essendo n un numero dispari, δ, h eguali a zero od all'unità. Questa funzione potrà esprimersi in tutta la generalità per la serie doppiamente infinita *):

$$\sum(-1)^{m[illegible]}A_m e^{[illegible]},$$

nella quale A_m è un coefficiente indeterminato. Ma per la seconda e la terza delle (7) si hanno le

$$A_{[illegible]}=A_{[illegible]},\qquad A_{[illegible]}=A_{[illegible]},$$

dalle quali:

$$A_{[illegible]}=A_{[illegible]};$$

quindi tutti i coefficienti A_m pei quali $m>n-1$ saranno esprimibili per gli n seguenti:

$$A_{[illegible]},\ A_{[illegible]},\ \ldots\ A_{[illegible]}$$

e fra questi avranno luogo le relazioni:

$$A_{1-[illegible]}=A_{[illegible]1},\qquad A_{2[illegible]}=A_{[illegible]},\qquad \ldots\qquad A_{[illegible]}=A_{[illegible]},$$

per cui non ne rimarranno indipendenti che un numero $\frac{n+1}{2}$. Abbiamo così il

Teorema I. — *L'espressione la più generale della funzione* $\Pi(v)$ *definita dalle equazioni* (7) *contiene* $\frac{n+1}{2}$ *coefficienti indipendenti.*

Operando come sopra potrebbesi dimostrare, ciò che d'altronde è noto, che le quattro funzioni jacobiane $\theta(v)$, colle quali si esprimono le funzioni inverse delle ellittiche, sono algebricamente riducibili a due di esse; e che fra queste non può sussistere alcuna relazione algebrica.

Indichiamo con $\theta_0(v)$, $\theta_1(v)$ queste due funzioni e con ν_0, q_0; ν_1, q_1 i valori delle ν, q per le medesime. Si consideri una funzione omogenea del grado n di $\theta_0(v)$, $\theta_1(v)$; essa verrà espressa linearmente da prodotti della forma $\theta_0^a\theta_1^b$, dove a, b sono numeri interi ed $a+b=n$. Pongasi:

$$\Pi(v)=\sum B\theta_0^{[illegible]}\theta_1^{[illegible]},$$

*) Weierstrass, *Theorie der Abel'schen Functionen* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LII (1856), pp. 285-380 (p. [illegible])].

essendo B un coefficiente costante; osservando le (5) si avranno evidentemente le

$$\Pi(v+1) = (-1)^{a\nu_0+b\nu_1}\,\Pi(v),$$

$$\Pi(v+\gamma) = (-1)^{aq_0+bq_1}\,e^{-i\pi n(2v+\gamma)}\,\Pi(v),$$

$$\Pi(-v) = (-1)^{a\nu_0 q_0+b\nu_1 q_1}\,\Pi(v),$$

per cui la funzione $\Pi(v)$ sarà definita dalle equazioni (7) allorquando sussistano le

$$a\nu_0+b\nu_1\equiv\delta,\quad aq_0+bq_1\equiv h,\quad a\nu_0 q_0+b\nu_1 q_1\equiv\delta h \pmod{2}.$$

Supponiamo dapprima $\delta=\nu_0$, $h=q_0$ ed indichiamo con $\Pi_0(v)$ la funzione che corrisponde a quei valori di δ, h. Affinchè le congruenze superiori sieno soddisfatte dovranno essere: $a\equiv 1$, $b\equiv 0 \pmod{2}$; quindi:

$$\Pi_0(v) = B_0\theta_0^n + B_1\theta_0^{n-2}\theta_1^2 + \dots + B_{\frac{n-1}{2}}\theta_0\theta_1^{n-1}; \tag{8}$$

e supponendo in secondo luogo $\delta=\nu_1$, $h=q_1$, ed indicando con $\Pi_1(v)$ la funzione corrispondente, si avranno le $a\equiv 0$, $b\equiv 1 \pmod{2}$, per cui:

$$\Pi_1(v) = C_0\theta_0^{n-1}\theta_1 + C_1\theta_0^{n-3}\theta_1^3 + \dots + C_{\frac{n-1}{2}}\theta_1^n. \tag{9}$$

Queste due espressioni delle funzioni $\Pi_0(v)$, $\Pi_1(v)$, contenendo si l'una che l'altra $\frac{n+1}{2}$ coefficienti indipendenti, sono pel Teorema I le più generali che le funzioni stesse ammettano.

4. Ciò posto, si osservi che, fatto per brevità $s=a_2c+b_2$ cambiando nella funzione Jacobiana $\Theta(v)$ la v in sv, ottiensi facilmente:

$$e^{i\pi a_2 s(v+1)^2}\,\Theta[s(v+1)] = (-1)^{\delta}\,e^{i\pi a_2 s v^2}\,\Theta(sv), \tag{10}$$

essendo

$$\delta = pa_2 + \mu b_2 + a_2 b_2;$$

ed analogamente giungesi alla

$$e^{2i\pi a_1 v + i\pi a_1\gamma}\,\Theta[s(v+\gamma)] = (-1)^{h}\,\Theta(sv),$$

nella quale

$$h = pa_1 + \mu b_1 + a_1 b_1.$$

Ora, supponendo

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = n,$$

si ha:

$$a_1 s = n + a_2 s\gamma;$$

per cui, sostituendo e moltiplicando per $e^{i\pi a_2 s v^2}$, si ha:

$$e^{i\pi a_2 s(v+\gamma)^2}\,\Theta[s(v+\gamma)] = (-1)^{h}\,e^{-i\pi n(2v+\gamma)}\,e^{i\pi a_2 s v^2}\,\Theta(sv). \tag{11}$$

Da ultimo, essendo

$$\Theta(-sv) = (-1)^{\mu\nu}\,\Theta(sv),$$

osservando che, per essere n dispari, dovranno essere, per es., $\delta \equiv \mu b_2$, $h \equiv p a_1$ (mod. 2), per cui $\delta h \equiv \mu p$ (mod. 2), si avrà:

$$(12) \qquad e^{\pi i a_2 [illegible] v^2}\,\Theta(-sv) = (-1)^{\mu p}\, e^{\pi i a_2 [illegible] v^2}\,\Theta(sv).$$

Le equazioni (10), (11), (12) dimostrano che la funzione

$$H(v) \equiv e^{\pi i a_2 [illegible] v^2}\,\Theta(sv)$$

è definita dalle equazioni (7) e quindi per essa varranno le proprietà enunciate nel Teorema I e nelle equazioni (8), (9). Cioè, indicando con Θ_0, Θ_1 due fra le funzioni $\Theta(v)$, e con μ_0, p_0; μ_1, p_1 i valori delle μ, p corrispondenti ad esse, e supponendo

$$(13) \quad \begin{cases} p_0 a_2 + \mu_0 b_2 + a_2 b_2 \equiv \nu_0, & p_1 a_2 + \mu_1 b_2 + a_2 b_2 \equiv \nu_1, \\ p_0 a_1 + \mu_0 b_1 + a_1 b_1 \equiv q_0, & p_1 a_1 + \mu_1 b_1 + a_1 b_1 \equiv q_1, \end{cases} \qquad \text{(mod. 2)}$$

si avranno le:

$$(14) \quad \begin{cases} e^{\pi i a_2 [illegible] v^2}\,\Theta_0(sv) = B_0\,\vartheta^n + B_1\,\vartheta^{n-2}\vartheta_1^2 + \ldots + B_{\frac{n-1}{2}}\,\vartheta\,\vartheta_1^{n-1}, \\ e^{\pi i a_2 [illegible] v^2}\,\Theta_1(sv) = C_0\,\vartheta^{n-1}\vartheta_1 + C_1\,\vartheta^{n-3}\vartheta_1^3 + \ldots + C_{\frac{n-1}{2}}\,\vartheta_1^n. \end{cases}$$

5. Per determinare i valori dei coefficienti B_0, B_1, ...; C_0, C_1, ... faremo uso di alcune note proprietà delle funzioni Jacobiane. A ciò supponiamo

$$\mu_0 = p_0 = 1, \qquad \nu_0 = q_0 = 1,$$

$$\mu_1 = 0, \quad p_1 = 1, \qquad \nu_1 = 0, \quad q_1 = 1;$$

le equazioni (13) daranno:

$$\begin{aligned} a_2 + b_2 + a_2 b_2 &\equiv 1, & a_2 + a_2 b_2 &\equiv 0, \\ a_1 + b_1 + a_1 b_1 &\equiv 1, & a_1 + a_1 b_1 &\equiv 1, \end{aligned} \qquad \text{(mod. 2)}$$

per le quali a_1, b_2 dispari, b_1 pari ed a_2 pari o dispari. Le (3) daranno:

$$\Theta_0(v+1) = -\Theta_0(v), \qquad \Theta_1(v+1) = \Theta_1(v),$$

$$\Theta_0(v+\tau) = -e^{-\pi i [illegible]}\,\Theta_0(v), \qquad \Theta_1(v+\tau) = -e^{-\pi i [illegible]}\,\Theta_1(v),$$

$$\Theta_0(-v) = -\Theta_0(v), \qquad \Theta_1(-v) = \Theta_1(v).$$

per le quali, indicando con η, ρ due numeri interi:

$$\Theta_0(\eta + \rho\tau) = 0.$$

Inoltre si hanno le

$$\theta_0\left(v + \frac{\gamma}{2}\right) = -e^{-\pi(\ldots)}\theta_1(v), \qquad \theta_1\left(v + \frac{\gamma}{2}\right) = e^{-\pi(\ldots)}\theta_0(v),$$

e

$$e^{\pi \ldots (\ldots)^2}\Theta_1\left[s\left(v + \frac{\gamma}{2}\right)\right] = t\, e^{-\pi n\left(\ldots + \frac{\gamma}{4}\right)} e^{\pi a_2 s \ldots^2}\Theta_0(sv),$$

essendo

$$t = (-1)^{\frac{1}{2}\ldots} e^{\frac{i\pi}{4}a_1 b_1}.$$

Ora, se nella seconda delle equazioni (14) cambiasi la v in $v + \frac{\gamma}{2}$ ottiensi, per le ultime equazioni superiori, la seguente:

$$t\, e^{\pi a_2 \ldots^2}\Theta(sv) = C_0\,\theta_1^{n-1}\theta_0 + C_1\,\theta_1^{n-3}\theta_0^3 + \ldots + C_{\frac{n-1}{2}}\,\theta_0^n,$$

la quale, posta a confronto colla prima delle equazioni (14) stesse, dimostra essere:

$$C_{\frac{n-1}{2}} = tB_0, \qquad C_{\frac{n-3}{2}} = tB_1, \qquad \ldots \qquad C_0 = tB_{\frac{n-1}{2}},$$

per cui la seconda delle (14) assumerà la forma:

$$e^{\pi a_2 \ldots}\Theta_1(sv) = t\left(B_{\frac{n-1}{2}}\theta_0^{n-1}\theta_1 + B_{\frac{n-3}{2}}\theta_0^{n-3}\theta_1^3 + \ldots + B_0\theta_1^n\right).$$

Ne risulta che, posto $\frac{\theta_0(v)}{\theta_1(v)} = \psi(v)$, si hanno le due equazioni:

$$(15)\qquad \begin{cases} e^{\pi \ldots}\Theta_0(sv) = \theta_1^n\psi(v)\left[B_0\psi^{n-1}(v) + B_1\psi^{n-3}(v) + \ldots + B_{\frac{n-1}{2}}\right], \\ e^{\pi \ldots}\Theta_1(sv) = t\theta_1^n\left[B_{\frac{n-1}{2}}\psi^{n-1}(v) + B_{\frac{n-3}{2}}\psi^{n-3}(v) + \ldots + B_0\right]. \end{cases}$$

I valori dei coefficienti B_0, B_1, ... $B_{\frac{n-1}{2}}$ si ottengono nel modo seguente. Supponendo ρ, η due numeri interi, facciasi:

$$\rho b_2 - \eta a_2 = \mu, \qquad \eta a_1 - \rho b_1 = \nu, \qquad \frac{\mu\gamma + \nu}{n} = \omega.$$

Ponendo nella prima delle (15) $\varepsilon\omega$ (ε numero intero) in luogo di v, essendo

$$s(c_2\gamma - b_1) = nc, \qquad s(a_1 - a_2\gamma) = n,$$

si ha:

$$(16)\qquad \Theta_0(s\varepsilon\omega) = \Theta_0[\varepsilon(\eta + \rho\tau)] = 0,$$

e quindi

$$(17)\qquad B_0\psi^{\frac{n-1}{2}}(\varepsilon\omega)+B_1\psi^{\frac{n-3}{2}}(\varepsilon\omega)+\ldots+B_{\frac{n-1}{2}}=0.$$

Osserviamo che, dalle relazioni

$$\vartheta_0(v+\mu\tau+\nu)=(-1)^{\mu+\nu}e^{\cdots}\vartheta_0(v),$$

$$\vartheta_1(v+\mu\tau+\nu)=(-1)^{\mu}e^{\cdots}\vartheta_1(v),$$

ottiensi evidentemente la equazione:

$$\psi(n\omega+v)=-(-1)^{\nu}\psi(-v),$$

la quale conduce alle seguenti:

$$\psi[(n-1)\omega]=-(-1)^{\nu}\psi(\omega),$$

. . . .

$$\psi\left(\frac{n+1}{2}\omega\right)=-(-1)^{\nu}\psi\left(\frac{n-1}{2}\omega\right).$$

Dunque le radici dell'equazione (17) saranno le

$$\psi(\omega),\quad \psi(2\omega),\quad \ldots\quad \psi\left(\frac{n-1}{2}\omega\right),$$

ed in conseguenza le (15) diventano:

$$e^{\cdots}\Theta_0(sv)=B_0\vartheta_1\psi(v)[\psi^2(v)-\psi^2(\omega)][\psi^2(v)-\psi^2(2\omega)]\ldots\left[\psi^2(v)-\psi^2\left(\frac{n-1}{2}\omega\right)\right],$$

$$e^{\cdots}\Theta_1(sv)=B_0\vartheta_1^n[1-\psi^2(v)\psi^2(\omega)][1-\psi^2(v)\psi^2(2\omega)]\ldots\left[1-\psi^2(v)\psi^2\left(\frac{n-1}{2}\omega\right)\right];$$

dalle quali, ponendo

$$\frac{\Theta_0(v)}{\Theta_1(v)}=\Psi(v),$$

deducesi la

$$(18)\qquad \Psi(sv)=\frac{1}{l}\,\frac{\psi(v)[\psi^2(v)-\psi^2(\omega)]\ldots\left[\psi^2(v)-\psi^2\left(\frac{n-1}{2}\omega\right)\right]}{[1-\psi^2(v)\psi^2(\omega)]\ldots\left[1-\psi^2(v)\psi^2\left(\frac{n-1}{2}\omega\right)\right]}.$$

Notiamo che, avendosi facilmente, in causa delle equazioni (16), la

$$\Psi[s(v+\varepsilon\omega)]=\Psi(sv),$$

le espressioni

$$\psi(v),\quad \psi(v+\omega),\quad \psi(v+2\omega),\quad \ldots\quad \psi[v+(n-1)\omega]$$

sono le radici dell'equazione

$$x[x^2-\psi^2(\omega)]\ldots\left[x^2-\psi^2\left(\frac{n-1}{2}\omega\right)\right]-t\Psi(sv)[1-x^2\psi^2(\omega)]\ldots\left[1-x^2\psi^2\left(\frac{n-1}{2}\omega\right)\right]=0\,.$$

Quindi si avranno anche le due formole di trasformazione:

$$(19)\quad\left\{\begin{aligned}&(-1)^{\frac{n-1}{2}}\Psi(sv)=\frac{1}{t}\,\frac{\psi(v)+\psi(v+\omega)+\ldots+\psi[v+(n-1)\omega]}{\psi^2(\omega)\psi^2(2\omega)\ldots\psi^2\left(\frac{n-1}{2}\omega\right)},\\&(-1)^{n-1}\Psi(sv)=\frac{1}{t}\psi(v)\psi(v+\omega)\ldots\psi[v+(n-1)\omega].\end{aligned}\right.$$

6. Rimane ora a trovarsi la relazione fra i moduli. A ciò osserviamo che, supposto a_2 essere pari, si ha:

$$\Theta_0\left(v+\frac{a_2c}{2}\right)=(-1)^{\frac{1}{2}a_2}e^{-\frac{\pi i}{2}a_2\left(2v+\frac{1}{2}a_2c\right)}\Theta_0(v),$$

$$\Theta_0\left(v+\frac{b_2}{2}\right)=(-1)^{\frac{1}{2}(b_2-1)}\Theta_0\left(v+\frac{1}{2}\right),$$

per cui:

$$\Theta_0\left(v+\frac{s}{2}\right)=(-1)^{\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{2}(b_2-1)}e^{-\frac{\pi i}{2}a_2\left(2v+b_2+\frac{1}{2}a_2c\right)}\Theta_0\left(v+\frac{1}{2}\right);$$

ed analogamente:

$$\Theta_1\left(v+\frac{s}{2}\right)=(-1)^{\frac{1}{2}a_2}e^{-\frac{\pi i}{2}a_2\left(2v+b_2+\frac{1}{2}a_2c\right)}\Theta_1\left(v+\frac{1}{2}\right).$$

Quindi sarà:

$$\Psi\left(\frac{s}{2}\right)=(-1)^{\frac{1}{2}(b_2-1)}\Psi\left(\frac{1}{2}\right),$$

e la (18), nella quale pongasi $v=\frac{1}{2}$, darà la relazione richiesta:

$$(20)\quad(-1)^{\frac{n-1}{2}+\frac{1}{2}(b_2-1)}\Psi\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{t}\,\frac{\psi\left(\frac{1}{2}\right)\left[\psi^2\left(\frac{1}{2}\right)-\psi^2(\omega)\right]\ldots\left[\psi^2\left(\frac{1}{2}\right)-\psi^2\left(\frac{n-1}{2}\omega\right)\right]}{\left[1-\psi^2\left(\frac{1}{2}\right)\psi^2(\omega)\right]\ldots\left[1-\psi^2\left(\frac{1}{2}\right)\psi^2\left(\frac{n-1}{2}\omega\right)\right]}.$$

Le formole (18), (19), (20) ponno farsi coincidere facilmente con quelle di JACOBI e di ABEL. Aggiungiamo che quest'ultimo geometra ottenne, in una delle sue memorie (XIV del vol. I delle *Opere*), le formole di trasformazione per mezzo di una

relazione fra gli indici di periodicità analoga alla (6) e dello sviluppo delle funzioni inverse per prodotti infiniti.

7. Accenniamo da ultimo brevemente ad un nuovo modo di presentare la soluzione del problema della trasformazione delle funzioni ellittiche dovuto al sig. Hermite; pel qual modo (principalmente però nel caso delle funzioni Abeliane) questa teorica viene a legarsi a quella delle forme. Posto $v = y + \gamma x$ ed

$$X = a_1 x + a_2 y, \qquad Y = b_1 x + b_2 y,$$

si hanno le

$$s v = Y + c X, \qquad a_2 s v^2 = a_2 (Y + c X)(y + \gamma x) = a_2 \varphi;$$

quindi, facendo

$$\theta(y + \gamma x) = f_{\nu,\mu}(x, y, \gamma), \qquad \Theta(Y + c X) = f_{\nu,\mu}(X, Y, c),$$

si avrà che la funzione

$$e^{\varphi^2} f_{\nu,\mu}(X, Y, c)$$

è esprimibile mediante una funzione omogenea di grado n di due funzioni $f_{\nu,\mu}(x, y, \gamma)$; sussistendo fra i moduli c, γ la relazione (6) e fra gli argomenti X, Y; x, y le (21).

Pavia, marzo 1857.

[Pa., G.].

XXXIX.

SUI POLIGONI INSCRITTI E CIRCOSCRITTI ALLE CONICHE.

Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, t. VIII [illegible].

Il problema di determinare a quali condizioni debbano soddisfare i parametri delle equazioni di due coniche, affinchè un poligono inscritto in una di esse sia circoscritto alla seconda, venne recentemente studiato dai sigg. CAYLEY e SALMON. I risultati ottenuti da questi geometri si presentano sotto forme assai differenti, e non sarebbe possibile che dopo lunghi sviluppi di calcolo il convincerci della loro identità. In questa Nota viene provata a priori la coincidenza di quei risultati, giungendo ai medesimi con un metodo che manifesta come si possano far dipendere da uno stesso principio.

Sieno $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ le equazioni dei lati di un triangolo inscritto nella conica

$$U = \alpha vw + \beta wu + \gamma uv = 0.$$

Posto

$$V = l^2 u^2 + m^2 v^2 + n^2 w^2 - 2mnvw - 2nlwu - 2lmuv,$$

ed indicando con x_1 una quantità indeterminata, è noto che, affinchè la retta $u = 0$ sia tangente alla conica

$$x_1 U - V = 0,$$

dovrà essere

$$a = 2mn - \alpha x_1;$$

ed analogamente saranno

$$b = 2nl - \beta x_1, \qquad c = 2lm - \gamma x_1$$

le condizioni le quali debbono verificarsi, perchè le rette $v = 0$, $w = 0$ sieno rispettivamente tangenti alle coniche

$$x_2 U - V = 0, \qquad x_3 U - V = 0.$$

Ora, indicando con

$$\Delta^2(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$$

il discriminante della funzione

$$x U - V,$$

si hanno le

$$a_0 = \alpha\beta\gamma,$$

$$a_1 = l^2\alpha^2 + m^2\beta^2 + n^2\gamma^2 + a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta,$$

$$a_2 = 2a\alpha l^2 + 2b\beta m^2 + 2c\gamma n^2 + \alpha bc + \beta ca + \gamma ab,$$

$$a_3 = l^2 a^2 + m^2 b^2 + n^2 c^2 + abc - 4 l^2 m^2 n^2,$$

ossia, pei valori superiori di a, b, c, le

$$a_0 = \alpha\beta\gamma,$$

$$a_1 = p^2 - \alpha\beta\gamma(x_1 + x_2 + x_3),$$

$$a_2 = 2pq + \alpha\beta\gamma(x_1 x_2 + x_3 x_1 + x_2 x_3),$$

$$a_3 = q^2 - \alpha\beta\gamma x_1 x_2 x_3,$$

essendosi posto per brevità:

$$p = l\alpha + m\beta + n\gamma, \qquad q = 4r - l\alpha x_1 - m\beta x_2 - n\gamma x_3, \qquad r = lmn.$$

Per cui, rappresentando con

$$x^3 + A x^2 + B x + C = 0 \tag{1}$$

la equazione di cui le radici sono x_1, x_2, x_3, si avranno le tre relazioni seguenti:

$$a_1 - a_0 A = p^2, \qquad a_2 - a_0 B = 2pq, \qquad a_3 - a_0 C = q^2. \tag{2}$$

Se queste equazioni si moltiplicano ordinatamente per x_1^2, x_1, 1, e si sommano osservando alla (1), ottiensi la seguente:

$$a_0 x_1^3 + a_1 x_1^2 + a_2 x_1 + a_3 = (p x_1 + q)^2$$

ed altre due analoghe; dal che deduciamo essere

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 - (px + q)^2 = a_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3); \tag{3}$$

e pel teorema di ABEL, ponendo $\psi(x) = \int \frac{1}{\Delta(x)} dx$, si avrà che i parametri x_1, x_2, x_3 dovranno soddisfare all'equazione trascendente:

$$\varepsilon_1 \psi(x_1) + \varepsilon_2 \psi(x_2) + \varepsilon_3 \psi(x_3) = C, \tag{4}$$

alla quale corrisponde la equazione algebrica irrazionale:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \Delta(x_1) \\ 1 & x_2 & \Delta(x_2) \\ 1 & x_3 & \Delta(x_3) \end{vmatrix} = 0.$$

Ma le equazioni (2) conducono evidentemente anche ad una relazione algebrica razionale fra quei parametri, cioè alla seguente:

$$4(a_2 - a_0 A)(a_4 - a_0 C) - (a_3 - a_0 B)^2 = 0. \tag{5}$$

Queste relazioni algebriche, ottenute sì l'una che l'altra eliminando le p, q dalle equazioni (2), costituiscono i risultati dei sigg. CAYLEY e SALMON.

Dalla equazione (3) si hanno le

$$p = \frac{\Delta(x_1) - \Delta(x_2)}{x_1 - x_2}, \qquad q = \frac{x_1 \Delta(x_2) - x_2 \Delta(x_1)}{x_1 - x_2};$$

per cui, supponendo

$$\Delta(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots,$$

si avrà:

$$q = A_0 - x_1 x_2 P,$$

posto

$$P = A_2 + A_3(x_1 + x_2) + A_4(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) + \dots.$$

La stessa equazione (3) o la terza delle (2) dànno:

$$q^2 - a_4 = a_0 x_1 x_2 x_3; \tag{6}$$

quindi, osservando essere $A_0^2 = a_4$, si otterrà:

$$x_3 = \frac{1}{a_0}(x_1 x_2 P^2 - 2 A_0 P). \tag{7}$$

Nel caso particolare in cui supponesi $x_1 = x_2 = 0$ questa formola dà

$$x_3 = -\frac{2 A_0 A_2}{a_0} = \frac{a_3^2 - 4 a_2 a_4}{4 a_0 a_4}; \tag{8}$$

cioè, se due lati di un triangolo inscritto nella conica $U = 0$ sono tangenti alla conica $V = 0$, il terzo lato sarà tangente alla conica

$$(a_2^2 - 4a_1a_3)\,U - 4a_0a_3\,V = 0.$$

Suppongasi ora $x_1 = 0$; la formola generale (7) dà

$$a_0 x_3 = -2A_0(A_2 + A_3x_2 + A_4x_2^2 + \ldots),$$

ossia:

$$a_0 x_2^2 x_3 = 2A_0[A_0 + A_1x_2 - \Delta(x_2)],$$

dalla quale:

$$a_0^2 x_2^4 x_3^2 - 4a_0A_0x_2^2x_3(A_0 + A_1x_2) = 4A_0^2[\Delta^2(x_2) - (A_0 + A_1x_2)^2];$$

ma, essendo

$$2A_0A_1 = a_2, \qquad A_1^2 = \frac{a_2^2}{4a_3},$$

si ha:

$$\Delta^2(x_2) - (A_0 + A_1x_2)^2 = \frac{x_2^2}{4a_3}(4a_0a_3x_2 + 4a_1a_3 - a_2^2),$$

per cui, sostituendo e riducendo, si ottiene:

$$a_0^2x_2^2x_3^2 - 4a_0a_3x_3 - 2a_0a_2x_2x_3 = 4a_0a_3x_2 + 4a_1a_3 - a_2^2, \tag{9}$$

la quale formola, come anche la (8), potevansi dedurre dalla (5).

Si immagini un quadrilatero $abcd$ inscritto nella conica $U = 0$, e suppongasi che i lati ab, bc, cd sieno tangenti alla conica $V = 0$; condotta la diagonale ac si ha il triangolo abc inscritto nella conica $U = 0$ e di cui i due lati ab, bc sono tangenti alla conica $V = 0$; per quanto si è dimostrato sopra, il terzo lato ac sarà tangente alla conica

$$\alpha U - V = 0,$$

essendo

$$\alpha = \frac{a_2^2 - 4a_1a_3}{4a_0a_3}.$$

Consideriamo ora il triangolo acd inscritto nella conica $U = 0$ e del quale un lato, cd, è tangente alla conica $V = 0$, un secondo, ac, tangente alla conica $\alpha U - V = 0$; il terzo lato sarà tangente alla conica $x_3 U - V = 0$, essendo il valore di x_3 dato dall'equazione (9), dove in luogo di x_2 pongasi α. Ora, fatta questa sostituzione, si ottiene:

$$x_3 = \frac{8a_3(8a_0a_3^2 + a_2^3 - 4a_1a_2a_3)}{(a_2^2 - 4a_1a_3)^2} = \beta;$$

quindi il quarto lato $\alpha\delta$ del quadrilatero $\alpha\beta\gamma\delta$ sarà tangente alla conica

$$8a_0(8a_0a_3^2 + a_1^3 - 4a_0a_1a_2)U - (a_1^2 - 4a_0a_2)^2 V = 0.$$

Immaginiamo ora un poligono $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ inscritto nella conica $U = 0$, e supponiamo che i lati $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_3$, $\ldots$ $\alpha_{n-1}\alpha_n$ sieno tangenti alla conica $V = 0$; il lato $\alpha_1\alpha_n$ sarà tangente alla conica $x_n U - V = 0$, ed il valore di x_n si troverà nel modo seguente. Sieno $x_{n-2}U - V = 0$, $x_{n-1}U - V = 0$ le equazioni delle coniche alle quali sarebbero tangenti le diagonali $\alpha_1\alpha_{n-2}$, $\alpha_1\alpha_{n-1}$ considerate come lati dei poligoni $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-2}$, $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}$. Pei triangoli $\alpha_1\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}$, $\alpha_1\alpha_{n-1}\alpha_n$ si avranno, analogamente alla (9), le

$$a_0^2x_{n-2}^2x_{n-1}^2 - 4a_0a_2x_{n-1} - 2a_0a_1x_{n-2}x_{n-1} = 4a_0a_2x_{n-2} + 4a_0a_3 - a_1^2,$$

$$a_0^2x_{n-1}^2x_n^2 - 4a_0a_2x_n - 2a_0a_1x_{n-1}x_n = 4a_0a_2x_{n-1} + 4a_0a_3 - a_1^2,$$

le quali, sottratte l'una dall'altra, dànno:

$$a_0^2x_{n-1}^2(x_n + x_{n-2}) = [illegible],$$

ed anche per la prima delle superiori:

$$a_0^2x_n x_{n-1}^2 x_{n-2} = [illegible].$$

Quindi:

$$x_n = \frac{4a_0(\alpha - x_{n-2}) [illegible]}{a_0^2 [illegible]},$$

per mezzo della quale conoscendosi i valori di x_3, x_4, che sono α, β, si ottengono di seguito quelli di x_5, x_6, $\ldots$ Osservando i risultati superiori è evidente che, se

$$a_1^2 - 4a_0a_2 = 0,$$

vi saranno triangoli inscritti nella conica $U = 0$ e circoscritti alla $V = 0$; se

$$8a_0^2a_3 + a_1^3 - 4a_0a_1a_2 = 0,$$

vi saranno quadrilateri inscritti nella conica $U = 0$ e circoscrivibili alla $V = 0$; e così via.

Notiamo da ultimo che, supponendo nella (4) $x_3 = h$ costante, si ha la equazione alle derivate:

$$\frac{dx_1}{\Delta(x_1)} \pm \frac{dx_2}{\Delta(x_2)} = 0,$$

e le equazioni (5), (6) sono i noti integrali razionale ed irrazionale della medesima.

Giugno 1857.

[G.].

XL.

INTORNO AD ALCUNE PROPRIETÀ DELLE SUPERFICIE A LINEE DI CURVATURA PIANE O SFERICHE.

Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, [illegible]

1. Le prime ricerche intorno alle superficie di cui le linee di curvatura sono piane si devono a Monge, il quale nel § XVII della « *Application de l'Analyse* », ecc. determinava la classe di superficie che hanno le linee di una curvatura situate in piani paralleli. In seguito Joachimsthal *) considerava le superficie per le quali le linee di una curvatura sono poste in piani passanti per una retta, e più di recente i signori Bonnet e Serret presentavano varie memorie all'Accademia delle Scienze di Parigi **), nelle quali vengono discussi tutti i casi di superficie di cui le linee delle due curvature sono piane, o quelle dell'una curvatura piane e quelle dell'altra sferiche, od ambedue sferiche ***). Ma l'essere piane o sferiche le linee di una curvatura è in molti casi conseguenza necessaria di disposizioni particolari dei piani e delle sfere che contengono le linee dell'altra curvatura, come ha mostrato a posteriori il signor Bonnet pel caso particolare del Joachimsthal; per il che credo di qualche interesse le formole seguenti, le quali dimostrano a priori la esistenza di queste relazioni fra le linee di curvatura e sono anche utili nella ricerca di proprietà delle superficie a linee di curvatura piane o sferiche.

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. XXX ([illegible]), p. [illegible].

**) Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XXXVI (1853).—Journal de l'École Polytechnique, cahier XXXV (1853). — Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. XVIII (1853).

***) Il sig. Bonnet ha però considerato anche il caso delle superficie nelle quali le linee di curvatura di un solo sistema sono piane o sferiche.

2. Sieno x, y, z le coordinate di un punto di una superficie, le quali si ritengano funzioni di due variabili indipendenti u, v. Posto

$$
(1)\qquad \left\{
\begin{aligned}
& E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \qquad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,\\
& A = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}, \quad B = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad C = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u},
\end{aligned}
\right.
$$

se le linee $u =$ cost., $v =$ cost. sono linee di curvatura della superficie, si hanno le

$$
(2)\qquad \left\{
\begin{aligned}
& A\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + B\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + C\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0,\\
& \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0;
\end{aligned}
\right.
$$

ma dalle (1) si deducono le

$$
\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v},
$$

$$
\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v},
$$

per le quali e per la prima delle (2) risultano

$$
(3)\qquad \left\{
\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v},\\
& \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v},\\
& \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.
\end{aligned}
\right.
$$

Si indichino con a, b, c i coseni degli angoli che la normale alla superficie al punto di coordinate x, y, z forma coi tre assi, e con R_u, R_v i raggi di curvatura della superficie corrispondenti alle linee $u =$ cost., $v =$ cost. Dalle relazioni *):

$$
(4)\qquad \left\{
\begin{aligned}
& \frac{\partial a}{\partial v} = -\frac{1}{R}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial b}{\partial v} = -\frac{1}{R}\frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial c}{\partial v} = -\frac{1}{R}\frac{\partial z}{\partial v},\\
& \frac{\partial a}{\partial u} = -\frac{1}{R}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial b}{\partial u} = -\frac{1}{R}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial c}{\partial u} = -\frac{1}{R}\frac{\partial z}{\partial u},
\end{aligned}
\right.
$$

*) V. Vol. II, p. 122 (p. 121).

si deducono le due seguenti *):

$$\frac{1}{2R\sqrt{E}}\frac{\partial E}{\partial v} = \left(\frac{\sqrt{E}}{R}\right)', \qquad \frac{1}{2R\sqrt{G}}\frac{\partial G}{\partial u} = \left(\frac{\sqrt{G}}{R}\right)',$$

che, ponendo per brevità

(5) $$\frac{1}{2\sqrt{EG}}\frac{\partial E}{\partial v} = \omega, \quad \frac{1}{2\sqrt{EG}}\frac{\partial G}{\partial u} = \theta, \quad \frac{\sqrt{E}}{R} = M, \quad \frac{\sqrt{G}}{R} = N,$$

diventano:

(6) $$\frac{\partial M}{\partial v} = \omega N, \qquad \frac{\partial N}{\partial u} = \theta M,$$

alle quali possiamo aggiungere la formola di Gauss:

(7) $$-MN = \frac{\partial \omega}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u}.$$

3. Le linee $v =$ cost. sieno piane, ed

$$lx + my + nz = p$$

(dove l, m, n, p sono funzioni di v ed $l^2 + m^2 + n^2 = 1$) sia la equazione di uno qualunque dei piani di quelle linee. Si avranno evidentemente le

$$l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial y}{\partial u} + n\frac{\partial z}{\partial u} = 0,$$

$$a\frac{\partial x}{\partial u} + b\frac{\partial y}{\partial u} + c\frac{\partial z}{\partial u} = 0;$$

delle quali la prima, osservando le (4), conduce alla

$$la + mb + nc = \cos\psi(v)$$

(teorema del Joachimsthal); e, ponendo per brevità $k = \frac{\sqrt{E}}{\operatorname{sen}\psi}$, si deducono dalle due le seguenti:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = k(mc - nb), \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = k(na - lc), \qquad \frac{\partial z}{\partial u} = k(lb - ma).$$

---

*) Vedi la Nota del prof. Codazzi: *Intorno alle superficie le quali deformandosi ritengono le stesse linee di curvatura.* [Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, t. VII (1856), p. 410].

Quindi:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\partial k}{\partial u}(mc - nb) + \frac{k}{R_1}\left(n\frac{\partial y}{\partial u} - m\frac{\partial z}{\partial u}\right), \quad \ldots ,$$

le quali, moltiplicate ordinatamente per

$$\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial v}$$

e sommate, dànno la

$$\frac{1}{2E\sqrt{G}}\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\cot\psi}{R_1},$$

ossia, per le denominazioni superiori,

$$(8) \qquad \omega = M\cot\psi(v);$$

ed analogamente sarà

$$(8') \qquad \theta = N\cot\xi(u)$$

se le linee $u =$ cost. sono piane. Reciprocamente, se per le linee di curvatura $v =$ cost., $u =$ cost. sussistono le equazioni (8), (8'), le linee stesse sono piane. Infatti, indicando con α_v, r_v per le linee $v =$ cost. l'angolo compreso dalla perpendicolare al piano del circolo osculatore e dalla normale alla superficie, ed il raggio del circolo osculatore, si hanno le

$$\frac{1}{2E\sqrt{G}}\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\cos\alpha_v}{r_v}, \qquad \frac{1}{R_1} = \frac{\operatorname{sen}\alpha_v}{r_v};$$

quindi la (8) diventa

$$\cot\alpha_v = \cot\psi(v),$$

cioè le linee di curvatura $v =$ cost. sono linee piane.

Le linee $v =$ cost. sieno sferiche ed

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2$$

(essendo α, β, γ, r funzioni di v) sia l'equazione di una delle sfere. Si avranno le

$$(x-\alpha)\frac{\partial x}{\partial u} + (y-\beta)\frac{\partial y}{\partial u} + (z-\gamma)\frac{\partial z}{\partial u} = 0,$$

$$a\frac{\partial x}{\partial u} + b\frac{\partial y}{\partial u} + c\frac{\partial z}{\partial u} = 0,$$

la prima delle quali per la (4) dà

$$(x-\alpha)a + (y-\beta)b + (z-\gamma)c = r\cos\varphi(v),$$

ed operando come superiormente giungesi alla

$$(9) \qquad \omega = \frac{\sqrt{E}}{r \operatorname{sen} \rho(v)} + M \cot \rho(v);$$

ed analogamente, se le linee $u =$ cost. sono sferiche, si ha la relazione

$$(9') \qquad \vartheta = \frac{\sqrt{G}}{r_1 \operatorname{sen} \rho_1(u)} + N \cot \rho_1(u),$$

nella quale r_1, ρ_1 sono funzioni della sola u. Reciprocamente, sussistendo le equazioni (9), (9′) per le linee di curvatura $v =$ cost., $u =$ cost., le linee medesime sono sferiche.

Le formole (3), (6), (7), (8)-(8′), (9)-(9′) sono le annunciate al n° 1.

4. È noto che, se una linea di curvatura di una superficie è geodetica, essa è piana. Non credo osservata la seguente proprietà: *Se una linea di curvatura di una superficie è fra quelle che racchiudono massima o minima area fra le isoperimetre* *), *essa è sferica.* Infatti, se con g indicasi il raggio di curvatura della linea, con α l'angolo compreso fra esso e la normale alla superficie, con h l'angolo di torsione della linea, si hanno le

$$h' - \alpha' = 0, \qquad \frac{\operatorname{sen} \alpha}{g} = \frac{1}{m},$$

essendo m costante; nella prima delle quali è espressa la proprietà dell'essere la linea una linea di curvatura della superficie, nella seconda di esser la linea stessa una didonia. Ora questa seconda equazione dà

$$\alpha' = \frac{g'}{\sqrt{m^2 - g^2}},$$

e quindi per quella linea sarà

$$h' = \frac{g'}{\sqrt{m^2 - g^2}},$$

proprietà caratteristica delle linee sferiche. La linea sarebbe tracciabile sulla sfera di raggio m, ed indicando con R il raggio di massima o di minima curvatura corrispondente a quella linea si ha la relazione:

$$\frac{1}{m^2} = \frac{1}{g^2} - \frac{1}{R^2}.$$

---

*) Il sig. HAMILTON ha proposto di denominare queste linee «Didonie» (*Lectures on Quaternions*, p. 582).

È noto che, se la linea $v = \text{cost.}$ è geodetica, si ha

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 0;$$

e se la linea medesima è una didonia

$$\frac{1}{2E\sqrt{G}} \frac{\partial E}{\partial v} = \xi(v);$$

le (8), (9) dimostrano che, se quella linea è anche di curvatura, si ha in generale nel primo caso $\psi(v) = \frac{\pi}{2}$, e nel secondo $\varphi(v) = \frac{\pi}{2}$ [formole (8), (9)].

5. Ciò premesso, passiamo a considerare le superficie per le quali le linee di una curvatura sono geodetiche. Vedremo come questo caso conduce ad alcune delle superficie già trovate dai signori Bonnet e Serret. Le linee di curvatura $v = \text{cost.}$ sieno geodetiche, quindi $\frac{\partial E}{\partial v} = 0$, $\omega = 0$; le (3) integrate dànno:

$$(10) \qquad \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} = l(v), \quad \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial y}{\partial v} = m(v), \quad \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial z}{\partial v} = n(v),$$

essendo $l^2 + m^2 + n^2 = 1$; e dalla prima delle (6) si ha

$$\frac{\partial M}{\partial v} = 0,$$

cioè il raggio R_v, che è anche il raggio del circolo osculatore delle linee $v = \text{cost.}$, indipendente dalla variabile v. Le (10) dimostrano che le tangenti alle linee $u = \text{cost.}$, in punti situati sopra una stessa linea $v = \text{cost.}$, sono parallele. Dalle (10) si ha:

$$l \frac{\partial x}{\partial u} + m \frac{\partial y}{\partial u} + n \frac{\partial z}{\partial u} = 0,$$

ed integrando

$$(11) \qquad lx + my + nz = \varphi(v),$$

equazione di uno qualunque dei piani delle linee $v = \text{cost.}$

Dalla seconda delle (6) e dalla (7) si ha in questo caso

$$N \frac{\partial N}{\partial u} + \theta \frac{\partial \theta}{\partial u} = 0,$$

e quindi

$$(12) \qquad N^2 + \theta^2 = \xi^2(v).$$

Pongasi

(13) $$\vartheta = N \cot \chi ;$$

si hanno le

$$\vartheta = \zeta(v) \cos \chi, \qquad N = \zeta(v) \operatorname{sen} \chi, \qquad \frac{\partial \chi}{\partial v} = M,$$

ed essendo $\frac{\partial M}{\partial v} = 0$, $\frac{\partial E}{\partial v} = 0$, si otterrà:

(14) $$\chi = f(u) + F(v), \quad \sqrt{E} = g(u) ;$$

per le quali:

$$\frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial G}{\partial u} = \zeta(v)\, g(u) \cos\{f(u) + F(v)\},$$

(15) $$\sqrt{G} = \zeta(v)\Big[\cos F(v) \int g(u) \cos f(u)\, du - \operatorname{sen} F(v) \int g(u) \operatorname{sen} f(u)\, du\Big] + T(v).$$

Determinato in questo modo il valore di $\sqrt{G}$, le (10) daranno quelli di x, y, z in funzione di u, v, alcune delle funzioni arbitrarie prendendo valori particolari dietro le condizioni del problema. Accenniamo brevemente a quattro famiglie di superficie conosciute dotate della proprietà qui considerata.

1° $\varphi = 0$, $n = 0$. I piani delle linee $v =$ cost. passano tutti per l'asse della z. Le equazioni (10) dànno

$$x^2 + y^2 = k(u), \qquad z = h(u),$$

dalle quali, eliminando u,

$$z = F(x^2 + y^2),$$

cioè le superficie sono di rotazione.

2° $\varphi = 0$. I piani delle linee $v =$ cost., passano per uno stesso punto. Le (10), in causa della (11), dànno la

$$x^2 + y^2 + z^2 = p(u),$$

cioè le linee $u =$ cost. sono situate sopra sfere concentriche. Questo caso coincide con quello discusso dal Bonnet al n° 2 della parte terza della sua Memoria [Journal de l'École Polytechnique, cahier XXXV (1853), p. 238] e dal Serret al n° 3 della seconda parte della sua Memoria [Journal de Mathématiques pures et appliqués, t. XVIII (1853), p. 134].

3° l, m, n costanti, ossia i piani delle linee $v =$ cost. sono paralleli fra loro. La (11) dà

$$l \frac{\partial x}{\partial v} + m \frac{\partial y}{\partial v} + n \frac{\partial z}{\partial v} = \varphi'(v);$$

quindi

$$G = \varphi'^2(v),$$

e le linee $u = \text{cost.}$ sono anch'esse geodetiche. Le superficie che corrispondono a questo caso sono perciò sviluppabili.

4° Sia $F(v) = 0$, cioè suppongasi $\alpha = f(u)$. La (13) dà

$$\theta = N \cot f(u),$$

la quale, posta a confronto colla (8′), dimostra essere le linee del secondo sistema $u = \text{cost.}$ piane, ed essere $f(u)$ l'angolo costante compreso dal piano della linea e dal piano tangente la superficie in un punto qualunque di essa linea. Sia

$$x\lambda(u) + y\mu(u) + z\nu(u) = h(u)$$

l'equazione di uno dei piani delle linee $u = \text{cost.}$; essendo

$$\lambda \frac{\partial x}{\partial v} + \mu \frac{\partial y}{\partial v} + \nu \frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

si avrà, pei valori (10),

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0,$$

per soddisfare alla quale le λ, μ, ν dovranno essere costanti. Le linee di curvatura $u = \text{cost.}$ saranno perciò situate in piani paralleli, e le superficie che corrispondono a questo caso sono quindi quelle già considerate da MONGE (*Application de l'Analyse*, ecc., p. 161).

6. Considero ora le superficie nelle quali le linee $v = \text{cost.}$ di una curvatura sono linee didonie. Si ha

$$\frac{1}{2E\sqrt{G}} \frac{\partial E}{\partial v} = \frac{1}{r(v)}.$$

Le formole (3) dànno

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -\frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{2G\sqrt{G}} \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \dots,$$

le quali integrate conducono alle

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} &= \frac{1}{r}[x - \alpha(v)], \\ \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial y}{\partial v} &= \frac{1}{r}[y - \beta(v)], \\ \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{1}{r}[z - \gamma(v)], \end{aligned} \right.$$

e queste, quadrate e sommate, alla

$$(17) \qquad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = r^2,$$

equazione delle superficie sferiche sulle quali sono situate le linee di curvatura di quel sistema. Considereremo un solo caso il quale conduce ad una famiglia di superficie già conosciute.

Sieno $\alpha = 0$, $\beta = 0$, cioè i centri delle sfere sieno sull'asse delle z, retta qualsivoglia. Le prime due equazioni (16) dànno

$$\frac{1}{x}\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\sqrt{G}}{r} = \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial v},$$

e quindi

$$x = y\,m(u), \qquad x = \varphi(u)\,m(u)\sqrt{E}, \qquad y = \varphi(u)\sqrt{E};$$

e le linee $u =$ cost. sono situate in piani passanti per l'asse della z. Le superficie corrispondenti a questo caso sono perciò quelle considerate dal sig. JOACHIMSTHAL. Sostituendo i valori trovati per x, y nella (17) si ha:

$$\varphi^2(u)\,n^2(u)\,E + (z - \gamma)^2 = r^2,$$

essendo $n^2(u) = 1 + m^2(u)$; per cui, ponendo

$$\varphi(u)\,n(u)\sqrt{E} = r\,\mathrm{sen}\,\eta = (z - \gamma)\,\mathrm{tang}\,\eta,$$

si ha facilmente per le (16):

$$\frac{1}{r}\frac{d\gamma}{dv} = \frac{1}{\mathrm{sen}\,\eta}\frac{\partial \eta}{\partial v},$$

da cui

$$\eta = 2\,\mathrm{arc\,tang}\left[\psi(u)\,e^{\int \frac{d\gamma}{r}}\right];$$

la quale conduce ai noti valori di x, y, z in funzione di u e di v.

Pavia, agosto 1857.

OSSERVAZIONE. — In una Nota pubblicata di recente nel « Giornale dell'I. R. Istituto Lombardo », t. IX (1856), p. 397, il prof. MAINARDI, applicando alcune sue formole alla ricerca delle superficie di cui le linee di curvatura sono geodetiche, giunse ad un risultato che è in contraddizione col superiore. Ciò dipende dall'avere l'Autore dedotto il proprio risultato dal decomporre in due fattori una equazione, la quale, convenientemente modificata, essendo identica, non dà luogo, in questo caso, a conseguenza veruna.

Colgo quest'occasione per osservare anche che tutti gli Autori, i quali si occuparono di superficie di cui le linee di curvatura hanno proprietà speciali, trattando delle superficie per le quali le linee di una curvatura sono situate in piani passanti per una retta, dichiarano che alcune equazioni che le determinano furono date *senza dimostrazione* dal sig. JOACHIMSTHAL *). Ora questo distinto geometra, in un lavoro intitolato « *Mémoire sur les surfaces courbes* », pubblicato a Berlino in un programma scolastico (1848), non solo ha dato una bella dimostrazione di quelle equazioni, ma ha anche mostrato come da esse si potevano dedurre le seguenti interessanti proprietà delle superficie medesime:

1° Le linee di curvatura dell'altro sistema sono sferiche.

2° I centri di tutte le sfere sono sulla retta comune a tutti i piani delle curve del primo sistema.

3° La superficie sviluppabile circoscritta alla superficie secondo una linea di curvatura del secondo sistema è una superficie conica.

4° Il vertice di questa coincide col centro della sfera sulla quale è situata la linea di curvatura lungo la quale ha luogo il contatto.

Ottobre 1857.

[C., G.].

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. XXX (1846), p. 347.

XLI.

SULLO SVILUPPO DI UN DETERMINANTE.

Annali di Matematica pura ed applicata, [illegible]

Posto per brevità:

$$a_{rs} = \frac{1}{x_r - a_s}, \qquad \alpha_{rs} = \frac{1}{(x_r - a_s)^2},$$

si ha facilmente che il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha_{11} & \dots & a_{1n} & \alpha_{1n} \\ a_{21} & \alpha_{21} & \dots & a_{2n} & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n,1} & \alpha_{2n,1} & \dots & a_{2n,n} & \alpha_{2n,n} \end{vmatrix}$$

è uguale a

$$(1) \qquad (-1)^{[illegible]} \frac{\Pi^4(a_1, a_2, \dots a_n)\,\Pi(x_1, x_2, \dots x_{2n})}{\varphi^2(a_1)\varphi^2(a_2)\dots\varphi^2([illegible])},$$

essendo

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{2n})$$

ed il simbolo $\Pi(a_1, a_2, \dots a_n)$ indicando il prodotto delle differenze delle quantità $a_1, a_2, \dots a_n$, cioè:

$$\Pi(a_1, a_2, \dots a_n) = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\dots(a_1 - a_n)(a_2 - a_3)\dots(a_{n-1} - a_n).$$

Ora, supponendo

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n),$$

si hanno le relazioni:

$$\varphi(a_1)\varphi(a_2)\ \ldots\ \varphi(a_n) = P(x_1)P(x_2)\ \ldots\ P(x_{2n}),$$

$$\Pi^2(a_1,\, a_2,\, \ldots\, a_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} P'(a_1)P'(a_2)\ \ldots\ P'(a_n);$$

dunque si avrà anche

$$(2) \qquad A = (-1)^n \cdot \frac{P'^2(a_1)P'^2(a_2)\ \ldots\ P'^2(a_n)\Pi(x_1,\, x_2,\, \ldots\, x_{2n})}{\varphi(a_1)\varphi(a_2)\ \ldots\ \varphi(a_n)P(x_1)P(x_2)\ \ldots\ P(x_{2n})}.$$

Per ottenere gli sviluppi dei determinanti parziali $\frac{\partial A}{\partial \alpha_{r,s}}$, $\frac{\partial A}{\partial a_{r,s}}$ osserviamo che:

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial \alpha_{r,s}} = (-1)^{r+s}[a_{r,1}A_{r,1} + \ldots + a_{r,s-1}A_{r,s-1} + a_{r,s+1}A_{r,s+1} + \ldots + a_{r,2n}A_{r,2n}], \\ \dfrac{\partial A}{\partial a_{r,s}} = (-1)^{r+s+1}[\alpha_{r,1}A_{r,1} + \ldots + \alpha_{r,s-1}A_{r,s-1} + \alpha_{r,s+1}A_{r,s+1} + \ldots + \alpha_{r,2n}A_{r,2n}], \end{cases}$$

essendo $A_{r,1}$, $A_{r,2}$, ... determinanti del $2(n-1)^{\text{mo}}$ ordine analoghi all'A. Quindi pel valore (1) di quest'ultimo determinante si avrà:

$$A_{r,s} = (-1)^{n+r+s} \frac{\Pi^4(a_1, \ldots a_{r-1}, a_{r+1}, \ldots a_n)\Pi(x_1, \ldots x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots x_{s-1}, x_{s+1}, \ldots x_{2n})}{f^2(a_1)\ \ldots\ f^2(a_{r-1})f^2(a_{r+1})\ \ldots\ f^2(a_n)} \quad (i<s)$$

$$A_{r,s} = (-1)^{n+r+s-1} \frac{\Pi^4(a_1, \ldots a_{r-1}, a_{r+1}, \ldots a_n)\Pi(x_1, \ldots x_{s-1}, x_{s+1}, \ldots x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots x_{2n})}{f^2(a_1)\ \ldots\ f^2(a_{r-1})f^2(a_{r+1})\ \ldots\ f^2(a_n)} \quad (i>s),$$

nelle quali:

$$f(x) = \frac{\psi(x)}{x - x_s}, \qquad \psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x - x_r}.$$

Ora, ponendo

$$N(x) = \frac{P(x)}{x - a_r},$$

si ha:

$$f^2(a_1)\ \ldots\ f^2(a_{r-1})f^2(a_{r+1})\ \ldots\ f^2(a_n) = \frac{\psi^2(a_1)\ \ldots\ \psi^2(a_{r-1})\psi^2(a_{r+1})\ \ldots\ \psi^2(a_n)}{N^2(x_s)};$$

inoltre:

$$\left.\begin{aligned} &\Pi(x_1,\ \ldots\ x_{r-1},\ x_{r+1},\ \ldots\ x_{s-1},\ x_{s+1},\ \ldots\ x_{2n})\psi'(x_s) \\ &\qquad = (-1)^{r+1}\Pi(x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_{s-1},\ x_{s+1},\ \ldots\ x_{2n}) \end{aligned}\right\} \ i<s,$$

$$\left.\begin{aligned} &\Pi(x_1,\ \ldots\ x_{s-1},\ x_{s+1},\ \ldots\ x_{r-1},\ x_{r+1},\ \ldots\ x_{2n})\psi'(x_s) \\ &\qquad = (-1)^{r}\ \Pi(x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_{s-1},\ x_{s+1},\ \ldots\ x_{2n}) \end{aligned}\right\} \ i>s;$$

quindi:

$$A_{r,s}=(-1)^{n-1}\frac{\Pi^2(a_1,\ldots a_{r-1},a_{r+1},\ldots a_n)\,\Pi(x_1,x_2,\ldots x_{s-1},x_{s+1},\ldots x_n)}{\psi^2(a_1)\ldots\psi^2(a_{r-1})\psi^2(a_{r+1})\ldots\psi^2(a_n)}\,\frac{N^2(x_s)}{\psi'(x_s)}.$$

Sostituendo questo valore nella prima delle (3), osservando essere

$$\frac{N^2(x_1)}{(x_1-a_r)\psi'(x_1)}+\cdots+\frac{N^2(x_{s-1})}{(x_{s-1}-a_r)\psi'(x_{s-1})}+\frac{N^2(x_{s+1})}{(x_{s+1}-a_r)\psi'(x_{s+1})}$$
$$+\cdots+\frac{N^2(x_n)}{(x_n-a_r)\psi'(x_n)}=-\frac{P'^2(a_r)}{\psi(a_r)},$$

si ottiene:

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha_s}=(-1)^{n-1}\frac{\Pi^2(a_1,\ldots a_{r-1},a_{r+1},\ldots a_n)\,\Pi(x_1,x_2,\ldots x_{s-1},x_{s+1},\ldots x_n)}{\psi^2(a_1)\ldots\psi^2(a_{r-1})\psi^2(a_{r+1})\ldots\psi^2(a_n)}\,\frac{P'^2(a_r)}{\psi(a_r)};$$

ed analogamente:

$$\frac{\partial A}{\partial a}=(-1)^{n-1}\frac{\Pi^2(a_1,\ldots a_{r-1},a_{r+1},\ldots a_n)\,\Pi(x_1,x_2,\ldots x_{s-1},x_{s+1},\ldots x_n)}{\psi^2(a_1)\ldots\psi^2(a_{r-1})\psi^2(a_{r+1})\ldots\psi^2(a_n)}\left(\frac{P'^2(a_r)}{\psi(a_r)}\right)'.$$

Queste espressioni dei determinanti parziali $\frac{\partial A}{\partial \alpha_s},\frac{\partial A}{\partial a}$ si ponno trasformare come si è fatto superiormente pel determinante A; infatti, osservando che

$$\Pi^2(a_1,\ldots a_{r-1},a_{r+1},\ldots a_n)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\frac{P'(a_1)P'(a_2)\ldots P'(a_n)}{P'^2(a_r)},$$

$$\psi(a_1)\psi(a_2)\ldots\psi(a_n)=(-1)^{n}P(x_1)\ldots P(x_{s-1})P(x_{s+1})\ldots P(x_n),$$

dalle superiori si dedurranno le seguenti:

$$(4)\begin{cases}\dfrac{\partial A}{\partial \alpha_s}=(-1)\dfrac{P'^2(a_1)P'^2(a_2)\ldots P'^2(a_n)}{\psi(a_1)\psi(a_2)\ldots\psi(a_n)}\cdot\dfrac{\Pi(x_1,\ldots x_{s-1},x_{s+1},\ldots x_n)}{P(x_1)\ldots P(x_{s-1})P(x_{s+1})\ldots P(x_n)}\cdot\dfrac{\psi(a_r)}{P'^2(a_r)}\\[2ex]\dfrac{\partial A}{\partial a}=(-1)\dfrac{P'^2(a_1)P'^2(a_2)\ldots P'^2(a_n)}{\psi(a_1)\psi(a_2)\ldots\psi(a_n)}\cdot\dfrac{\Pi(x_1,\ldots x_{s-1},x_{s+1},\ldots x_n)}{P(x_1)\ldots P(x_{s-1})P(x_{s+1})\ldots P(x_n)}\left(\dfrac{\psi(a_r)}{P'^2(a_r)}\right)'.\end{cases}$$

Pavia, ottobre 1857.

[L.].

XLII.

SULLE FUNZIONI ABELIANE COMPLETE DI PRIMA E SECONDA SPECIE.

Annali di Matematica pura ed applicata, [illegible]

---

1. Siano $a_1, a_2, \ldots a_{2n+1}$, $2n+1$ numeri reali, differenti fra loro, e tali che

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{2n} < a_{2n+1}.$$

Posto

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_3) \ldots (x - a_{2n-1}),$$

$$Q(x) = A(x - a_2)(x - a_4) \ldots (x - a_{2n})(x - a_{2n+1}),$$

$$R(x) = P(x)\,Q(x),$$

essendo A un numero positivo, si denomineranno funzioni Abeliane complete di prima specie *) gli integrali definiti:

$$K_\nu = \frac{1}{2}\int_{a_{2\nu-1}}^{a_{2\nu}} \frac{P(x)}{(x - a_{2\nu-1})\sqrt{R(x)}}\,dx,$$

---

*) JACOBI, *De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. XIII (1835), pp. 55-78 (p. 76)].—WEIERSTRASS, *Beitrag zur Theorie der* ABEL'*schen Integrale* (Programma scolast. di Braunsberg, 1849); *Zur Theorie der* ABEL'*schen Functionen* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, XLVII (1854), pp. 289-306 (p. 293). — Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. XIX (1854), pp. 257-278 (p. 262)].

e funzioni Abeliane complete di seconda specie gli

$$L_{r,s} = \frac{1}{2}\frac{Q(a_{2r-1})}{P'(a_{2r-1})}\int_{a_{2s-1}}^{a_{2s}} \frac{P(x)}{(x-a_{2r-1})^2\sqrt{R(x)}}\,dx.$$

Supponendo inoltre

$$k_{r,s} = \frac{i}{2}\int_{a_{2s}}^{a_{2s+1}} \frac{P(x)}{(x-a_{2r-1})\sqrt{R(x)}}\,dx,$$

$$l_{r,s} = \frac{i}{2}\frac{Q(a_{2r-1})}{P'(a_{2r-1})}\int_{a_{2s}}^{a_{2s+1}} \frac{P(x)}{(x-a_{2r+1})^2\sqrt{R(x)}}\,dx$$

(nelle quali $i=\sqrt{-1}$), e

$$(1)\qquad \begin{cases} K'_{r,s} = k_{r,s} + k_{r,s+1} + \dots + k_{r,n}, \\ L'_{r,s} = l_{r,s} + l_{r,s+1} + \dots + l_{r,n}, \end{cases}$$

saranno $K'_{r,s}$, $L'_{r,s}$ le funzioni Abeliane complete di prima e seconda specie a moduli completivi.

Questi integrali definiti si renderanno determinati ritenendo che, allorquando x è compreso fra a_m ed a_{m+1}, sia

$$\sqrt{R(x)} = i^{m-1}\sqrt{(-1)^{m-1}R(x)},$$

in modo che la quantità sotto il segno radicale risulti sempre positiva.

Provasi facilmente che nel caso di $n=1$, cioè delle funzioni ellittiche, supposto $A=\frac{1}{a_3-a_1}$, si hanno le

$$K_{1,1} = K,\quad K'_{1,1} = K',\quad L_{1,1} = K - E,\quad L'_{1,1} = E',$$

per cui la relazione di Legendre,

$$KE' - K'(K-E) = \frac{\pi}{2},$$

prende la forma:

$$K_{1,1}L'_{1,1} - K'_{1,1}L_{1,1} = \frac{\pi}{2}.$$

2. Consideriamo dapprima l'integrale multiplo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} K_{1,1} & L_{1,1} & \dots & K_{n,1} & L_{n,1} \\ k_{1,1} & l_{1,1} & \dots & k_{n,1} & l_{n,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{1,n} & L_{1,n} & \dots & K_{n,n} & L_{n,n} \\ k_{1,n} & l_{1,n} & \dots & k_{n,n} & l_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Indicando con A il determinante

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \alpha_{1,1} & \dots & a_{n,1} & \alpha_{n,1} \\ a_{1,2} & \alpha_{1,2} & \dots & a_{n,2} & \alpha_{n,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,2n} & \alpha_{1,2n} & \dots & a_{n,2n} & \alpha_{n,2n} \end{vmatrix},$$

nel quale

$$a_{i,k} = \frac{1}{x_k - a_i}, \qquad \alpha_{i,k} = \frac{1}{(x_k - a_i)^2},$$

si avrà, rammentando la convenzione fatta intorno ai segni dei radicali, che

$$\Delta = \frac{\mathsf{Q}}{2^{2n}} \int_{a_1}^{a_2} dx_1 \int_{a_2}^{a_3} dx_2 \dots \int_{a_{2n}}^{a_{2n+1}} dx_{2n} \frac{P(x_1)P(x_2)\dots P(x_{2n})}{\sqrt{(-1)^n R(x_1)R(x_2)\dots R(x_{2n})}} A,$$

essendo

$$\mathsf{Q} = \frac{Q(a_1)\,Q(a_3)\dots Q(a_{2n-1})}{P'(a_1)\,P'(a_3)\dots P'(a_{2n-1})}.$$

Quindi, ponendo

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{2n}),$$

$$\mathsf{P} = R'(a_1)\,R'(a_3)\dots R'(a_{2n-1}),$$

si avrà, pel valore di A trovato nella Nota precedente [XLI, pp. 273-275, equazione (2)]:

$$\Delta = (-1)^n \frac{\mathsf{P}}{2^{2n}} \int_{a_1}^{a_2} dx_1 \int_{a_2}^{a_3} dx_2 \dots \int_{a_{2n}}^{a_{2n+1}} dx_{2n} \frac{\Pi(x_1, x_2, \dots x_{2n})}{\varphi(a_1)\varphi(a_3)\dots\varphi(a_{2n-1})\sqrt{(-1)^n R(x_1)R(x_2)\dots R(x_{2n})}}.$$

Introduciamo ora le $2n+1$ variabili $y_1, y_2, \dots y_{2n+1}$ legate alle $x_1, x_2, \dots x_{2n}$ dalle equazioni:

$$y_i^2 = \frac{\varphi(a_i)}{R'(a_i)}$$

e quindi legate fra loro dalla

$$(2) \qquad y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{2n+1}^2 = 1.$$

Questa nota trasformazione *) conduce alla relazione

---

*) *Auszug mehrerer Schreiben des Dr.* ROSENHAIN *an Herrn Professor* JACOBI *über die hyperelliptischen Transcendenten* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. XL (1850), p. 319]. — JACOBI, *Mathematische Werke,* t. II, p. 308.

$$\int_{a_1}^{a_2} dx_1 \int_{a_2}^{a_3} dx_2 \dots \int_{a_{2n}}^{a_{2n+1}} dx_{2n} \frac{\Pi(x_1, x_2, \dots x_{2n})}{\varphi(a_1)\varphi(a_3)\dots\varphi(a_{2n-1})\sqrt{(-1)^n R(x_1)\dots R(x_{2n})}}$$

$$= \frac{2^{2n}}{\mathsf{P}} \int^{(2n)} \frac{dy_1\, dy_2 \dots dy_{2n}}{y_1^2 y_3^2 \dots y_{2n-1}^2 y_{2n+1}},$$

essendo i limiti per l'integrale multiplo del secondo membro tutti i valori positivi delle $y_1, y_2, \dots y_{2n}$ che soddisfano l'equazione (2). Se ora osserviamo essere

$$\int^{(2n)} \frac{dy_1\, dy_2 \dots dy_{2n}}{y_1^2 y_3^2 \dots y_{2n-1}^2 y_{2n+1}} = (-1)^n \left(\frac{\pi}{2}\right)^n,$$

si avrà sostituendo che

$$\Delta = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n. \tag{3}$$

3. Le trasformazioni mediante le quali abbiamo sopra ottenuto il valore del determinante Δ valgono anche a determinare quelli dei determinanti parziali:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial K_{r,s}}, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial k_{r,s}}; \qquad \frac{\partial \Delta}{\partial L_{r,s}}, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial l_{r,s}}. \tag{4}$$

Infatti si hanno le

$$\frac{\partial \Delta}{\partial K_{r,s}} = \frac{i^n}{2^{2n-1}} \mathsf{Q} \int^{(2n-1)} \frac{P(x_1)\dots P(x_{2s-2})P(x_{2s})\dots P(x_{2n})}{\sqrt{R(x_1)\dots R(x_{2s-2})R(x_{2s})\dots R(x_{2n})}} \frac{\partial A}{\partial a_{r,2s-1}} dx_1 \dots dx_{2s-2} dx_{2s} \dots dx_{2n},$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial k_{r,s}} = \frac{i^{n-1}}{2^{2n-1}} \mathsf{Q} \int^{(2n-1)} \frac{P(x_1)\dots P(x_{2s-1})P(x_{2s+1})\dots P(x_{2n})}{\sqrt{R(x_1)\dots R(x_{2s-1})R(x_{2s+1})\dots R(x_{2n})}} \frac{\partial A}{\partial a_{r,2s}} dx_1 \dots dx_{2s-1} dx_{2s+1} \dots dx_{2n},$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial L_{r,s}} = \frac{i^n}{2^{2n-1}} \mathsf{Q} \int^{(2n-1)} \frac{P(x_1)\dots P(x_{2s-2})P(x_{2s})\dots P(x_{2n})}{\sqrt{R(x_1)\dots R(x_{2s-2})R(x_{2s})\dots R(x_{2n})}} \frac{\partial A}{\partial \alpha_{r,2s-1}} dx_1 \dots dx_{2s-2} dx_{2s} \dots dx_{2n},$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial l_{r,s}} = \frac{i^{n-1}}{2^{2n-1}} \mathsf{Q} \int^{(2n-1)} \frac{P(x_1)\dots P(x_{2s-1})P(x_{2s+1})\dots P(x_{2n})}{\sqrt{R(x_1)\dots R(x_{2s-1})R(x_{2s+1})\dots R(x_{2n})}} \frac{\partial A}{\partial \alpha_{r,2s}} dx_1 \dots dx_{2s-1} dx_{2s+1} \dots dx_{2n},$$

ritenendo sempre le variabili $x_1, x_2, \dots$ comprese fra a_1 ed a_2, a_2 ed a_3, ecc.; e sostituendo in esse per $\frac{\partial A}{\partial a_{r,2s-1}}$, $\frac{\partial A}{\partial a_{r,2s}}$, ecc. i loro valori trovati nella Nota precedente [XLI, pp. 273-275, equazioni (4)], giungiamo facilmente alle

$$\frac{\partial \Delta}{\partial K_{r,s}} = -\frac{i^n}{2^{2r-1}} \mathsf{P} \int^{(2r-1)} \frac{\Pi(x_1, \ldots x_{2r-2}, x_{2r}, \ldots x_{2n})}{\Psi \sqrt{R(x_1) \ldots R(x_{2r-2}) R(x_{2r}) \ldots R(x_{2n})}} \left(\frac{\psi(x_{2r-1})}{P'^2(a_{2r-1})}\right)'_{2r-1} dx_1 \ldots dx_{2r-2}\, dx_{2r} \ldots dx_{2n},$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \xi_{r,s}} = \frac{i^{n-1}}{2^{2n-1}} \mathsf{P} \int^{(2n-1)} \frac{\Pi(x_1, \ldots x_{2s-1}, x_{2s+1}, \ldots x_{2n})}{\Psi \sqrt{R(x_1) \ldots R(x_{2s-1}) R(x_{2s+1}) \ldots R(x_{2n})}} \left(\frac{\psi(x_{2r-1})}{P'^2(a_{2r-1})}\right)'_{2r-1} dx_1 \ldots dx_{2s-1}\, dx_{2s+1} \ldots dx_{2n},$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial L_{r,s}} = -\frac{i^n}{2^{2n-1}} \frac{\mathsf{P}}{R'(a_{2r-1})} \int^{(2n-1)} \frac{\Pi(x_1, \ldots x_{2s-2}, x_{2s}, \ldots x_{2n})}{\Psi \sqrt{R(x_1) \ldots R(x_{2s-2}) R(x_{2s}) \ldots R(x_{2n})}} \psi(a_{2r-1}) dx_1 \ldots dx_{2s-2}\, dx_{2s} \ldots dx_{2n},$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda_{r,s}} = \frac{i^{n-1}}{2^{2n-1}} \frac{\mathsf{P}}{R'(a_{2r-1})} \int^{(2n-1)} \frac{\Pi(x_1, \ldots x_{2s-1}, x_{2s+1}, \ldots x_{2n})}{\Psi \sqrt{R(x_1) \ldots R(x_{2s-1}) R(x_{2s+1}) \ldots R(x_{2n})}} \psi(a_{2r-1}) dx_1 \ldots dx_{2s-1}\, dx_{2s+1} \ldots dx_{2n},$$

nelle quali

$$\Psi = \psi(a_1)\psi(a_2) \ldots \psi(a_{2n-1})$$

e $\psi(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x - x_{2s-1}}$ nella prima e terza, ed $\dfrac{\varphi(x)}{x - x_{2s}}$ nella seconda e quarta.

Quindi, posto

$$S(x) = \frac{R(x)}{x - a_m}, \quad \psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x - x_m},$$

la ricerca dei valori degli integrali definiti (4) riducesi a quella dei due:

$$= \int_{a_1}^{a_2} dx_1 \ldots \int_{a_{m-1}}^{a_{m+1}} dx_{m-1} \int_{a_{m+1}}^{a_{m+2}} dx_{m+1} \ldots \int_{a_{2n}}^{a_{2n+1}} dx_{2n} \frac{\Pi(x_1, \ldots x_{m-1}, x_{m+1}, \ldots x_{2n})}{\Psi \sqrt{S(x_1) \ldots S(x_{m-1}) S(x_{m+1}) \ldots S(x_{2n})}} \frac{1}{\psi(a_m)} \left(\frac{\psi(a_{2r-1})}{P'^2(a_{2r-1})}\right)'_{2r-1},$$

$$V_m = \int_{a_1}^{a_2} dx_1 \ldots \int_{a_{m-1}}^{a_{m+1}} dx_{m-1} \int_{a_{m+1}}^{a_{m+2}} dx_{m+1} \ldots \int_{a_{2n}}^{a_{2n+1}} dx_{2n} \frac{\Pi(x_1, \ldots x_{m-1}, x_{m+1}, \ldots x_{2n})}{\Psi \sqrt{S(x_1) \ldots S(x_{m-1}) S(x_{m+1}) \ldots S(x_{2n})}} \frac{\psi(a_{2r-1})}{\psi(a_m)}.$$

Se sopra questi integrali eseguiamo la prima trasformazione accennata sopra, ponendo

$$y_1^2 = \frac{\psi(a_1)}{S'(a_1)}, \ldots y_{m-1}^2 = \frac{\psi(a_{m-1})}{S'(a_{m-1})}, \qquad y_{m+1}^2 = \frac{\psi(a_{m+1})}{S'(a_{m+1})}, \ldots y_{2n+1}^2 = \frac{\psi(a_{2n+1})}{S'(a_{2n+1})},$$

ed osserviamo che dalle equazioni

$$\frac{\psi(a_1)}{R'(a_1)} + \frac{\psi(a_2)}{R'(a_2)} + \ldots + \frac{\psi(a_{2n+1})}{R'(a_{2n+1})} = 0, \qquad \frac{\partial y_s^2}{\partial a_{2r-1}} = -\frac{y_s^2}{a_{2r-1} - a_s}$$

si deducono le due

$$\frac{\psi(a_m)}{R'(a_m)} = s_1 y_1^2 + \ldots + s_{m-1} y_{m-1}^2 + s_{m+1} y_{m+1}^2 + \ldots + s_{2n+1} y_{2n+1}^2,$$

$$\left(\frac{\psi(a_{2r-1})}{P'^2(a_{2r-1})}\right)'_{a_{2r-1}} = \frac{S'(a_{2r-1})}{P'^2(a_{2r-1})} [h_1 y_1^2 + \ldots + h_{m-1} y_{m-1}^2 + h_{m+1} y_{m+1}^2 + \ldots + h_{2n+1} y_{2n+1}^2],$$

nelle quali

$$b_r = \frac{1}{a_{2n} - a_r}, \quad b_\rho = -\frac{1}{a_{2r-1} - a_\rho}, \quad b_{2r-1} = \left(\log \frac{S'(a_{2r-1})}{P'^2(a_{2r-1})}\right)'_{a_{2r-1}},$$

potremo sugli integrali così trasformati operare una seconda trasformazione, della quale diede varj esempj Jacobi al capo IV° della sua Memoria: « *De binis quibuslibet functionibus homogeneis secundi ordinis* », ecc. *). Perciò daremo qui soltanto i risultati dell'integrazione, non presentando essa difficoltà dopo le considerazioni superiori.

4. Questi risultati, posti sotto la forma più opportuna per le conseguenze che vogliamo dedurne, sono i seguenti:

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\Delta}{\partial K_{r,s}} - \dfrac{\partial\Delta}{\partial K_{r,s-1}} = -\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{n-1} l_{r,s-1}, & \dfrac{\partial\Delta}{\partial L_{r,s}} - \dfrac{\partial\Delta}{\partial L_{r,s-1}} = \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{n-1} k_{r,s-1}, \\[2ex] \dfrac{\partial\Delta}{\partial k_{r,s}} - \dfrac{\partial\Delta}{\partial k_{r,s-1}} = -\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{n-1} L_{r,s}, & \dfrac{\partial\Delta}{\partial l_{r,s}} - \dfrac{\partial\Delta}{\partial l_{r,s-1}} = \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{n-1} K_{r,s}. \end{cases}$$

Indichiamo ora con ∇ il determinante

$$\begin{vmatrix} K_{1,1} & L_{1,1} & \ldots & K_{n,1} & L_{n,1} \\ K'_{1,1} & L'_{1,1} & \ldots & K'_{n,1} & L'_{n,1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{1,n} & L_{1,n} & \ldots & K_{n,n} & L_{n,n} \\ K'_{1,n} & L'_{1,n} & \ldots & K'_{n,n} & L'_{n,n} \end{vmatrix};$$

si otterranno facilmente per le (1) le relazioni:

$$\nabla = \Delta, \qquad \frac{\partial\nabla}{\partial K_{r,s}} = \frac{\partial\Delta}{\partial K_{r,s}}, \qquad \frac{\partial\nabla}{\partial L_{r,s}} = \frac{\partial\Delta}{\partial L_{r,s}},$$

$$\frac{\partial\nabla}{\partial K'_{r,1}} + \frac{\partial\nabla}{\partial K'_{r,2}} + \cdots + \frac{\partial\nabla}{\partial K'_{r,s}} = \frac{\partial\Delta}{\partial k_{r,s}}, \quad \frac{\partial\nabla}{\partial L'_{r,1}} + \frac{\partial\nabla}{\partial L'_{r,2}} + \cdots + \frac{\partial\nabla}{\partial L'_{r,s}} = \frac{\partial\Delta}{\partial l_{r,s}};$$

quindi dalle equazioni (3), (5) si dedurranno le

$$(6)\qquad \nabla = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n,$$

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\nabla}{\partial K_{r,s}} - \dfrac{\partial\nabla}{\partial K_{r,s-1}} = -\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{n-1} l_{r,s-1}, & \dfrac{\partial\nabla}{\partial L_{r,s}} - \dfrac{\partial\nabla}{\partial L_{r,s-1}} = \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{n-1} k_{r,s-1}, \\[2ex] \dfrac{\partial\nabla}{\partial K'_{r,s}} = -\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{n-1} L_{r,s}, & \dfrac{\partial\nabla}{\partial L'_{r,s}} = \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{n-1} K_{r,s}; \end{cases}$$

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. XII (1834), pp. 1-69 (p. 60).

e siccome alle due penultime, essendo per le (1):

$$L_{r,s-1} = L'_{r,s-1} - L'_{r,s}$$
$$K_{r,s-1} = K'_{r,s-1} - K'_{r,s},$$

si ponno sostituire le

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial K_{r,s}} - \frac{\partial \Gamma}{\partial K_{r,s-1}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} (L'_{r,s} - L'_{r,s-1}),$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial L_{r,s}} - \frac{\partial \Gamma}{\partial L_{r,s-1}} = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} (K'_{r,s} - K'_{r,s-1}),$$

si avranno anche le

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Gamma}{\partial K'_{r,s}} - \dfrac{\partial \Gamma}{\partial K_{r,s}} = \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{n-1} (L'_{r,s} - L_{r,s}), \\[2ex] \dfrac{\partial \Gamma}{\partial L'_{r,s}} - \dfrac{\partial \Gamma}{\partial L_{r,s}} = -\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{n-1} (K'_{r,s} - K_{r,s}). \end{cases}$$

Le equazioni (6), (7) dànno origine alla seguente:

$$\sum_1^n \left(L'_{r,s} \frac{\partial \Gamma}{\partial L'_{r,s}} + K'_{r,s} \frac{\partial \Gamma}{\partial K'_{r,s}}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} \sum_1^n (K_{r,s} L'_{r,s} - L_{r,s} K'_{r,s}) = \Gamma,$$

ossia:

$$\sum_1^n (K_{r,s} L'_{r,s} - L_{r,s} K'_{r,s}) = \frac{\pi}{2}.$$

Analogamente si ottengono da quelle equazioni le

$$\sum_1^n (K_{r,s} L'_{r,m} - L_{r,s} K'_{r,m}) = 0,$$

$$\sum_1^n (K_{r,s} L_{r,m} - L_{r,s} K_{r,m}) = 0;$$

e dalle (6), (8) la

$$\sum_1^n (K'_{r,s} L'_{r,m} - K'_{r,m} L'_{r,s}) = 0.$$

Sono queste le $n(2n-1)$ relazioni fra le funzioni Abeliane complete di prima e seconda specie, già dimostrate con altri principj dal sig. WEIERSTRASS nel programma scolastico succitato e dal medesimo riportate nella Memoria: « *Zur Theorie der* ABEL'*schen Functionen* » *). Ora siccome dalla prima, seconda e quarta delle equazioni superiori

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. XLVII (1854), pp. 289-306 (p. 302).

deducesi facilmente essere:

$$(9)\qquad \frac{\partial \nabla}{\partial K_{r,s}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} L'_{r,s}, \qquad \frac{\partial \nabla}{\partial L_{r,s}} = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} K'_{r,s},$$

evidentemente queste due equazioni terranno luogo delle (7); le $n(2n-1)$ relazioni suddette si potranno ritenere quali conseguenze delle equazioni (6), (7), (9), e reciprocamente.

La considerazione di queste ultime equazioni conduce a trovare altre $n(2n-1)$ relazioni, fra le funzioni Abeliane complete, di forma differente dalle superiori del signor WEIERSTRASS. Infatti, essendo

$$\sum_1^n \left(K_{m,s} \frac{\partial \nabla}{\partial L_{r,s}} + K'_{m,s} \frac{\partial \nabla}{\partial L'_{r,s}} \right) = 0,$$

le seconde equazioni (7), (9) dànno:

$$(10)\qquad \sum_1^n (K_{r,s} K'_{m,s} - K_{m,s} K'_{r,s}) = 0,$$

ed analogamente:

$$(11)\qquad \sum_1^n (L_{r,s} L'_{m,s} - L_{m,s} L'_{r,s}) = 0,$$

oltre le quali si hanno le due:

$$\sum_1 (K_{r,s} L'_{m,s} - K'_{r,s} L_{m,s}) = 0,$$

$$\sum_1^n (K_{r,s} L'_{r,s} - K'_{r,s} L_{r,s}) = \frac{\pi}{2}.$$

Le $\frac{n(n-1)}{2}$ relazioni (10) sono di molta importanza essendo fra sole funzioni Abeliane complete di prima specie e le loro completive, come pure le (11) riguardo a quelle di seconda specie.

Pavia, ottobre 1857.

[L.].

XLIII.

SOPRA ALCUNE PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI ABELIANE.

Annali di Matematica pura ed applicata, [illegible]

1. Le n variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$ sieno legate ad altrettante $u_1, u_2, \ldots u_n$, dalle equazioni:

$$(1) \qquad \frac{\partial x_s}{\partial u_r} = U_r \frac{2\sqrt{R(x_s)}}{(x_s - a_r)\varphi'(x_s)},$$

nelle quali

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n),$$

le $U_1, U_2, \ldots$ sono funzioni delle $u_1, u_2, \ldots u_n$; ed indicando con $a_1, a_2, \ldots a_{2n+1}$ $2n+1$ quantità costanti differenti fra loro, e con A una funzione delle medesime, si ha:

$$R(x) = A(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_{2n+1}).$$

Posto

$$\Delta(x) = \sqrt{R(x)}, \qquad S(x) = (x - a_m)(x - a_s),$$

essendo m, s due numeri della serie 1, 2, ... $2n+1$, trattasi di derivare rispetto ad u_r la espressione:

$$\sum_i \frac{\Delta(x_i)}{S(x_i)\varphi'(x_i)}.$$

2. Supponiamo dapprima che i numeri m, s ed r sieno differenti fra loro. Si

osservi che

$$(2)\qquad \frac{\partial}{\partial u_r}\left(\frac{\Delta(x_1)}{S(x_1)\varphi'(x_1)}\right)=\frac{1}{S(x_1)}\frac{\partial}{\partial u_r}\left(\frac{\Delta(x_1)}{\varphi'(x_1)}\right)-\frac{\Delta(x_1)\,S'(x_1)\,\partial x_1}{\varphi'(x_1)\,S^2(x_1)\,\partial u_r}.$$

Ora

$$\frac{\partial}{\partial u_r}\left(\frac{\Delta(x_1)}{\varphi'(x_1)}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\Delta(x_1)}{\varphi'(x_1)}\right)\frac{\partial x_1}{\partial u_r}+\Delta(x_1)\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{\varphi'(x_1)}\right)\frac{\partial x_2}{\partial u}+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{1}{\varphi'(x_1)}\right)\frac{\partial x_n}{\partial u_r}\right],$$

ma

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{\varphi'(x_1)}\right)=\frac{1}{\varphi'(x_1)}\frac{1}{x_1-x_2},\quad \text{ecc.},$$

dunque si avrà:

$$\frac{\partial}{\partial u_r}\left(\frac{\Delta(x_1)}{\varphi'(x_1)}\right)=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\Delta(x_1)}{\varphi'(x_1)}\right)\frac{\partial x_1}{\partial u_r}+\frac{\Delta(x_1)}{\varphi'(x_1)}\left[\frac{1}{x_1-x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u_r}+\cdots+\frac{1}{x_1-x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u_r}\right],$$

e per la (1):

$$\frac{\partial}{\partial u_r}\left(\frac{\Delta(x_1)}{\varphi'(x_1)}\right)=U_r\left\{\frac{1}{x_1-a_r}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\Delta^2(x_1)}{\varphi'^2(x_1)}\right)\right.$$

$$\left.+\,2\frac{\Delta(x_1)}{\varphi'(x_1)}\left[\frac{\Delta(x_2)}{(x_1-x_2)(x_2-a_r)\varphi'(x_2)}+\cdots+\frac{\Delta(x_n)}{(x_1-x_n)(x_n-a_r)\varphi'(x_n)}\right]\right\}.$$

Sostituendo questa espressione nella (2), si ottiene:

$$(3)\qquad \frac{1}{U_r}\frac{\partial}{\partial u_r}\left(\frac{\Delta(x_1)}{S(x_1)\varphi'(x_1)}\right)=\frac{1}{L(x_1)}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\Delta^2(x_1)}{\varphi'^2(x_1)}\right)-2\frac{\Delta^2(x_1)}{\varphi'^2(x_1)}\frac{S'(x_1)}{L(x_1)\,S(x_1)}+X_1,$$

essendo

$$X_1=2\frac{\Delta(x_1)}{S(x_1)\varphi'(x_1)}\left[\frac{\Delta(x_2)}{(x_1-x_2)(x_2-a_r)\varphi'(x_2)}+\cdots+\frac{\Delta(x_n)}{(x_1-x_n)(x_n-a_r)\varphi'(x_n)}\right]$$

ed

$$L(x)=S(x)(x-a_r).$$

La equazione (3) riducesi facilmente alla seguente:

$$\frac{1}{U_r}\frac{\partial}{\partial u_r}\left(\frac{\Delta(x_1)}{S(x_1)\varphi'(x_1)}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\Delta^2(x_1)}{L(x_1)\varphi'^2(x_1)}\right)+\frac{\Delta^2(x_1)}{\varphi'^2(x_1)}\frac{1}{(x_1-a_r)^2S^2(x_1)}\left[S(x_1)-(x_1-a_r)S'(x_1)\right]+X_1,$$

ovvero, osservando essere

$$S(x)-(x-a_r)S'(x)=(a_r-a_m)(a_r-a_s)-(x-a_r)^2,$$

alla:

$$\frac{1}{U_r}\frac{\partial}{\partial u_r}\left(\frac{\Delta(x_1)}{S(x_1)\varphi'(x_1)}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\Delta^2(x_1)}{L(x_1)\varphi'^2(x_1)}\right)+(a_r-a_{r-1})(a_r-a_{r+1})\frac{\Delta^2(x_1)}{L^2(x_1)\varphi'^2(x_1)}-\frac{\Delta^2(x_1)}{S^2(x_1)\varphi'^2(x_1)}+X_1.$$

Analogamente, ponendo

$$X_2=2\frac{\Delta(x_2)}{S(x_2)\varphi'(x_2)}\left[\frac{\Delta(x_1)}{(x_2-x_1)(x_1-a_r)\varphi'(x_1)}+\cdots+\frac{\Delta(x_n)}{(x_2-x_n)(x_n-a_r)\varphi'(x_n)}\right],$$

si otterrebbe:

$$\frac{1}{U_r}\frac{\partial}{\partial u_r}\left(\frac{\Delta(x_2)}{S(x_2)\varphi'(x_2)}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\Delta^2(x_2)}{L(x_2)\varphi'^2(x_2)}\right)+(a_r-a_{r-1})(a_r-a_{r+1})\frac{\Delta^2(x_2)}{L^2(x_2)\varphi'^2(x_2)}-\frac{\Delta^2(x_2)}{S^2(x_2)\varphi'^2(x_2)}+X_2,$$

e così altre $n-2$; le quali equazioni sommate dànno:

$$\frac{1}{U_r}\frac{\partial}{\partial u_r}\sum_1^n\frac{\Delta(x_i)}{S(x_i)\varphi'(x_i)}=\sum_1^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\Delta^2(x_i)}{L(x_i)\varphi'^2(x_i)}\right)$$

$$+(a_r-a_{r-1})(a_r-a_{r+1})\sum_1^n\frac{\Delta^2(x_i)}{L^2(x_i)\varphi'^2(x_i)}-\sum_1^n\frac{\Delta^2(x_i)}{S^2(x_i)\varphi'^2(x_i)}+\sum_1^n X_i.$$

Ma

$$\sum_1^n X_i=2\frac{\Delta(x_1)\Delta(x_2)}{\varphi'(x_1)\varphi'(x_2)}\frac{1}{x_1-x_2}\left[\frac{S(x_2)(x_1-a_r)-S(x_1)(x_2-a_r)}{(x_1-a_r)(x_2-a_r)S(x_1)S(x_2)}\right]+\cdots$$

e, siccome

$$S(x_2)(x_1-a_r)-S(x_1)(x_2-a_r)=(x_1-x_2)\left[(a_r-a_{r-1})(a_r-a_{r+1})-(x_1-a_r)(x_2-a_r)\right],$$

si avrà:

$$\sum_1^n X_i=2\frac{\Delta(x_1)\Delta(x_2)}{\varphi'(x_1)\varphi'(x_2)}\left[\frac{(a_r-a_{r-1})(a_r-a_{r+1})}{L(x_1)L(x_2)}-\frac{1}{S(x_1)S(x_2)}\right]+\cdots;$$

per cui sostituendo si giungerà alla

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{U_r}\frac{\partial}{\partial u_r}\sum_1^n\frac{\Delta(x_i)}{S(x_i)\varphi'(x_i)}=\sum\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\Delta^2(x_i)}{L(x_i)\varphi'^2(x_i)}\right)\\&+(a_r-a_{r-1})(a_r-a_{r+1})\left(\sum_1^n\frac{\Delta(x_i)}{L(x_i)\varphi'(x_i)}\right)^2-\left(\sum\frac{\Delta(x_i)}{S(x_i)\varphi'(x_i)}\right)^2.\end{aligned}\right.$$

Per determinare il valore della prima sommatoria del secondo membro, pongasi

$$\frac{R(x)}{L(x)} = T(x);$$

si ha, come è noto,

$$\frac{T(x)}{\varphi^2(x)} = \sum_1^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{T(x_i)}{(x - x_i)\varphi'^2(x_i)}\right),$$

quindi eguagliando i coefficienti di $\frac{1}{x}$ nei due membri risulta:

$$\sum_1^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{T(x_i)}{\varphi'^2(x_i)}\right) = \sum_1^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\Delta^2(x_i)}{L(x_i)\varphi'^2(x_i)}\right) = 0,$$

e la (4) riducesi alla

$$\frac{1}{U_r}\frac{\partial}{\partial u_r}\sum_1^n \frac{\Delta(x_i)}{S(x_i)\varphi'(x_i)} = (a_r - a_s)(a_r - a_s)\left(\sum_1^n \frac{\Delta(x_i)}{L(x_i)\varphi'(x_i)}\right)^2 - \left(\sum_1^n \frac{\Delta(x_i)}{S(x_i)\varphi'(x_i)}\right)^2,$$

dalla quale si ha il valore della derivata richiesta. Porremo ora questa relazione sotto altra forma, in vista delle applicazioni che intendiamo fare di essa alla teorica delle funzioni Abeliane. Indichiamo con $G(x)$ il prodotto

$$(x - a_s)(x - a_r);$$

si avrà:

$$\frac{1}{L(x)} = \frac{1}{a_r - a_s}\left(\frac{1}{G(x)} - \frac{1}{S(x)}\right),$$

ed in conseguenza:

$$\frac{1}{U_r}\frac{\partial}{\partial u_r}\sum_1^n \frac{\Delta(x_i)}{S(x_i)\varphi'(x_i)} = \frac{a_s - a_r}{a_r - a_s}\left[\sum_1^n \frac{\Delta(x_i)}{G(x_i)\varphi'(x_i)} - 2\sum_1^n \frac{\Delta(x_i)}{S(x_i)\varphi'(x_i)}\right]\sum_1^n \frac{\Delta(x_i)}{G(x_i)\varphi'(x_i)}$$

$$+\frac{a_s - a_m}{a_r - a_s}\left(\sum_1^n \frac{\Delta(x_i)}{S(x_i)\varphi'(x_i)}\right)^2;$$

ed analogamente, quando s sia un numero della serie 1, 2, ... n, si avrà:

$$\frac{1}{U_s}\frac{\partial}{\partial u_s}\sum_1^n \frac{\Delta(x_i)}{G(x_i)\varphi'(x_i)} = \frac{a_r - a_s}{a_s - a_r}\left[\sum_1^n \frac{\Delta(x_i)}{S(x_i)\varphi'(x_i)} - 2\sum_1^n \frac{\Delta(x_i)}{G(x_i)\varphi'(x_i)}\right]\sum_1^n \frac{\Delta(x_i)}{S(x_i)\varphi'(x_i)}$$

$$+\frac{a_r - a}{a_s - a_r}\left(\sum_1^n \frac{\Delta(x_i)}{G(x_i)\varphi'(x_i)}\right)^2,$$

la quale sommata colla superiore conduce alla

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{U_r}\frac{\partial}{\partial u_s}\sum_1^n \frac{\Delta(x_i)}{S(x_i)\varphi'(x_i)} + \frac{1}{U_s}\frac{\partial}{\partial u_r}\sum_1^n \frac{\Delta(x_i)}{G(x_i)\varphi'(x_i)} \\ &\qquad + 2\sum_1^n \frac{\Delta(x_i)}{S(x_i)\varphi'(x_i)}\sum_1^n \frac{\Delta(x_i)}{G(x_i)\varphi'(x_i)} = 0. \end{aligned}\right.$$

3. Supponiamo ora $r = s$, e quindi s un numero della serie 1, 2, ... n. Analogamente alla (4) si avrà:

$$\frac{1}{U_r}\frac{\partial}{\partial u_r}\sum_1^n \frac{\Delta(x_i)}{S(x_i)\varphi'(x_i)} = \sum_1^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\Delta^2(x_i)}{N(x_i)\varphi'^2(x_i)}\right) - \left(\sum_1^n \frac{\Delta(x_i)}{S(x_i)\varphi'(x_i)}\right)^2,$$

nella quale

$$N(x) = (x - a_m)(x - a_r)^2.$$

Pongasi

$$M(x) = \frac{R(x)}{S(x)};$$

dalle formole per lo spezzamento delle frazioni si otterrà:

$$\frac{M(x)}{(x - a_m)\varphi^2(x)} = \frac{M(a_m)}{(x - a_m)\varphi^2(a_m)} + \sum_1^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{M(x_i)}{(x - x_i)(x_i - a_m)\varphi'^2(x_i)}\right);$$

e dal confronto dei coefficienti di $\frac{1}{x}$:

$$\sum_1^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\Delta^2(x_i)}{N(x_i)\varphi'^2(x_i)}\right) = -\frac{M(a_m)}{\varphi^2(a_m)} = -\frac{R'(a_m)}{(a_m - a_r)\varphi'(a_m)};$$

quindi per $r = s$ ed m differente da r e da s, si avrà:

$$(6)\quad \frac{1}{U_r}\frac{\partial}{\partial u_r}\sum_1^n \frac{\Delta(x_i)}{S(x_i)\varphi'(x_i)} = -\frac{R'(a_m)}{(a_m - a_r)\varphi'(a_m)} - \left(\sum_1^n \frac{\Delta(x_i)}{S(x_i)\varphi'(x_i)}\right)^2.$$

Così, nell'ipotesi di $m = s$ ed r differente da s, ponendo

$$F(x) = (x - a_r)(x - a_s),$$

si otterrà la relazione:

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{U_r}\frac{\partial}{\partial u_r}\sum_1^n \frac{\Delta(x_i)}{(x_i - a_s)^2\varphi'(x_i)} = -\frac{R'(a_s)}{(a_s - a_r)\varphi'(a_s)} \\ &+ \left[\sum_1^n \frac{\Delta(x_i)}{F(x_i)\varphi'(x_i)} - 2\sum_1^n \frac{\Delta(x_i)}{(x_i - a_s)^2\varphi'(x_i)}\right]\sum_1^n \frac{\Delta(x_i)}{F(x_i)\varphi'(x_i)}. \end{aligned}\right.$$

Da ultimo, se supponesi $r = s = m$, sarà:

$$\frac{1}{U}\frac{\partial}{\partial u}\sum_{1}^{n}\frac{\Delta(x_i)}{(x_i - a_s)\,\varphi'(x_i)} = \sum_{1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\Delta^2(x_i)}{(x_i - a_s)^2\varphi'^2(x_i)}\right) - \left(\sum_{1}^{n}\frac{\Delta(x_i)}{(x_i - a_s)^2\varphi'(x_i)}\right)^2;$$

e siccome, ponendo

$$\frac{1}{A}\frac{R(x)}{x - a} = V(x),$$

si ha:

$$\frac{V(x)}{(x - a)^2\varphi^2(x)} = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{V(a)}{(x - a)\varphi^2(a)}\right) + \sum_{1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{V(x_i)}{(x - x_i)(x_i - a)^2\varphi'(x_i)}\right),$$

e dal confronto dei coefficienti di $\frac{1}{x}$ risulta:

$$\sum_{1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{V(x_i)}{(x_i - a_s)^2\varphi'^2(x_i)}\right) = -\frac{\partial}{\partial a_s}\left(\frac{V(a_s)}{\varphi^2(a_s)}\right) = -\frac{\partial}{\partial a_s}\left(\frac{1}{A}\frac{R'(a_s)}{\varphi^2(a_s)}\right),$$

si otterrà la quarta formola:

$$(8)\qquad \frac{1}{U_s}\frac{\partial}{\partial u_s}\sum_{1}^{n}\frac{\Delta(x_i)}{(x_i - a_s)^2\varphi'(x_i)} = -A\frac{\partial}{\partial a_s}\left(\frac{1}{A}\frac{R'(a_s)}{\varphi^2(a_s)}\right) - \left(\sum_{1}^{n}\frac{\Delta(x_i)}{(x_i - a_s)^2\varphi'(x_i)}\right)^2.$$

4. Veniamo ora ad applicare le formole (5), (6), (7), (8) alla teorica delle funzioni Abeliane. Sieno

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n),$$

$$Q(x) = A(x - a_{n+1})(x - a_{n+2})\ldots(x - a_{2n+1});$$

indicando per brevità con l_m una quantità che è eguale a $-Q(a_m)$ se $m \leqq n$, od eguale a $+P(a_m)$ se $m > n$, denomineremo col sig. WEIERSTRASS *) *funzione Abeliana* la espressione:

$$\sqrt{\frac{\varphi(a_m)}{l_m}},$$

e, considerando la medesima come funzione delle variabili $u_1, u_2, \ldots u_n$, la rappresen-

*) Le ingegnose ricerche del sig. WEIERSTRASS nella teorica delle funzioni Abeliane sono pubblicate nel «Journal für die reine und angewandte Mathematik», t. XLVII (1854), pp. 289-306, e t. LII (1856), pp. 285-380. Le definizioni e denominazioni superiori sono quelle adottate da questo Autore nella seconda delle sue Memorie (p. 313), della quale non è finora pubblicata che una parte.

teremo con $p_m(u_1, u_2, \dots u_n)$, o più semplicemente con p_m. Supponiamo anche

$$(9)\qquad U_r = -\frac{\varphi(a_r)}{P'(a_r)} = \frac{Q(a_r)}{P'(a_r)}; \qquad (r = 1, 2, \dots n).$$

dalla (1) si ha:

$$\frac{1}{2}\sum_1^n \frac{P(x_i)}{(x_i - a_r)\Delta(x_i)}\frac{\partial x_i}{\partial u_r} = 1,$$

ed integrando:

$$(10)\qquad \frac{1}{2}\sum_1^n \int_{a_i}^{x_i} \frac{P(x)}{(x - a_r)\Delta(x)}\, dx = u_r;$$

le funzioni $p_1, p_2, \dots$ si potranno quindi ritenere, per quanto ha insegnato JACOBI, come funzioni inverse delle trascendenti ultra-ellittiche. Ora pel valore di p_m si ha:

$$\frac{\partial \log p_m}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x_i - a_m},$$

per cui le (1), (9) condurranno alle

$$(11)\qquad \frac{\partial \log p_m}{\partial u_m} = \frac{Q(a_m)}{P'(a_m)}\, p_m^2 \sum_1^n \frac{\Delta(x_i)}{S(x_i)\varphi'(x_i)}, \qquad \frac{\partial \log p_m}{\partial u_r} = \frac{Q(a_r)}{P'(a_r)}\, p_r^2 \sum_1^n \frac{\Delta(x_i)}{G(x_i)\varphi'(x_i)}.$$

Da queste equazioni si deducono le seguenti:

$$\frac{\partial}{\partial u_r}\sum_1^n \frac{\Delta(x_i)}{S(x_i)\varphi'(x_i)} = \frac{1}{U_m}\left(\frac{\partial^2 \log p_m}{\partial u_m \partial u_r} - 2\,\frac{\partial \log p_r}{\partial u_r}\,\frac{\partial \log p_m}{\partial u_m}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial u_s}\sum_1^n \frac{\Delta(x_i)}{G(x_i)\varphi'(x_i)} = \frac{1}{U_r}\left(\frac{\partial^2 \log p_m}{\partial u_r \partial u_s} - 2\,\frac{\partial \log p_r}{\partial u_s}\,\frac{\partial \log p_m}{\partial u_r}\right),$$

$$\sum_1^n \frac{\Delta(x_i)}{S(x_i)\varphi'(x_i)} = \frac{1}{U_r}\,\frac{\partial \log p_r}{\partial u_m},$$

$$\sum_1^n \frac{\Delta(x_i)}{G(x_i)\varphi'(x_i)} = \frac{1}{U_s}\,\frac{\partial \log p_s}{\partial u_r},$$

per le quali la equazione (5) dà

$$(12)\qquad \frac{\partial^2 \log p_m}{\partial u_r \partial u_s} = \frac{\partial \log p_m}{\partial u_r}\,\frac{\partial \log p_r}{\partial u_s} + \frac{\partial \log p_m}{\partial u_s}\,\frac{\partial \log p_s}{\partial u_r} - \frac{\partial \log p_m}{\partial u_r}\,\frac{\partial \log p_m}{\partial u_s}.$$

Affatto analogamente si otterrà dalla (6) la

$$(13)\qquad \frac{\partial^2 \log p_m}{\partial u_r^2} = 2\,\frac{\partial \log p_m}{\partial u_r}\,\frac{\partial \log p_r}{\partial u_r} - \left(\frac{\partial \log p_m}{\partial u_r}\right)^2 - \frac{Q(a_r)}{(a_r - a_m)P'(a_r)},$$

e dalle (7), (8) le

$$(14)\qquad \frac{\partial^2 \log p}{\partial u_r \partial u} = \frac{\partial \log p_s}{\partial u_r} \frac{\partial \log p_r}{\partial u_s} - \frac{Q(a_r)}{(a_s - a_r) P'(a_r)} \frac{p_r^2}{p_s^2},$$

$$(15)\qquad \frac{\partial^2 \log p}{\partial u_s^2} = \left(\frac{\partial \log p}{\partial u_s}\right)^2 + 2\, \frac{Q(a_s)}{P'(a_s)} \frac{\partial}{\partial a_s}\left(\log \frac{\varphi(a_s)}{P'(a_s)}\right) - A \frac{\partial}{\partial a_s}\left(\frac{Q(a_s)}{A P'(a_s)}\right),$$

all'ultima delle quali si può anche dare la seguente forma:

$$\frac{\partial^2 \log p_s}{\partial u_s^2} = \left(\frac{\partial \log p_s}{\partial u_s}\right)^2 + 4\, \frac{Q(a_s)}{P'(a_s)} \frac{\partial \log p_s}{\partial a_s} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial a_s}\left(\frac{A Q(a_s)}{P'(a_s)}\right).$$

Se ora osserviamo che, essendo

$$\sum_1^n \frac{\varphi(a_r)}{(x - a_r) P'(a_r)} = -1 + \frac{\varphi(x)}{P(x)},$$

si ha per $s = 1, 2, \ldots n$:

$$\sum_1^n \frac{Q(a_r)}{P'(a_r)} \frac{p_r^2}{x_s - a_r} = 1,$$

cioè che le $x_1, x_2, \ldots x_n$ sono le radici della equazione dell'ennesimo grado:

$$\sum_1^n \frac{Q(a_r)}{P'(a_r)} \frac{p_r^2}{x - a_r} = 1,$$

è evidente che la espressione

$$\frac{\partial \log \varphi(a_s)}{\partial a_s} = \frac{1}{a_s - x_1} + \frac{1}{a_s - x_2} + \cdots + \frac{1}{a_s - x_n}$$

sarà una funzione razionale delle $p_1, p_2, \ldots p_n$. Quindi le equazioni (12), (13), (14), (15) dimostrano la interessante proprietà, che le derivate seconde delle funzioni Abeliane $p_1, p_2, \ldots$ sono esprimibili mediante le funzioni stesse e le loro derivate prime.

5. Questa proprietà è già nota pel caso delle funzioni ellittiche. Supponendo $n = 1$, la (10) dà

$$\frac{1}{2}\int_{a_1}^{x} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = u = \int_0^y \frac{dy}{\Delta(y)},$$

posto

$$y^2 = \frac{x - a_1}{a_2 - a_1}, \quad \Delta(y) = \sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}, \quad k^2 = \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1}, \quad A = \frac{1}{a_3 - a_1}$$

ed $a_1 < a_2 < a_3$. Le p_1, p_2, p_3 sono quindi le funzioni ellittiche sn u, cn u, dn u. Se

nella (13) facciamo $s = 1$, $m = 2, 3$, si hanno le due equazioni:

$$\frac{\partial^2 \log \text{cn}\, u}{\partial u^2} = 2\, \frac{\partial \log \text{cn}\, u}{\partial u}\, \frac{\partial \log \text{sn}\, u}{\partial u} - \left(\frac{\partial \log \text{cn}\, u}{\partial u}\right)^2 + 1,$$

$$\frac{\partial^2 \log \text{dn}\, u}{\partial u^2} = 2\, \frac{\partial \log \text{dn}\, u}{\partial u}\, \frac{\partial \log \text{sn}\, u}{\partial u} - \left(\frac{\partial \log \text{dn}\, u}{\partial u}\right)^2 + k^2;$$

e siccome dalle (11) si hanno le

$$\frac{\partial \log \text{sn}\, u}{\partial u} = \frac{\text{cn}\, u \,.\, \text{dn}\, u}{\text{sn}\, u}, \quad \frac{\partial \log \text{cn}\, u}{\partial u} = -\frac{\text{sn}\, u \,.\, \text{dn}\, u}{\text{cn}\, u}, \quad \frac{\partial \log \text{dn}\, u}{\partial u} = -\frac{k^2\, \text{sn}\, u \,.\, \text{cn}\, u}{\text{dn}\, u},$$

le equazioni superiori si ridurranno alle note:

$$\frac{\partial^2 \log \text{cn}\, u}{\partial u^2} = -k^2\, \text{cn}^2 u - \frac{k'^2}{\text{cn}^2 u}, \qquad \frac{\partial^2 \log \text{dn}\, u}{\partial u^2} = -\text{dn}^2 u + \frac{k'^2}{\text{dn}^2 u},$$

nelle quali $k'^2 = 1 - k^2$. Da ultimo, essendo

$$\frac{\partial \log \varphi(x_1)}{\partial x_1} = \frac{1}{(x_1 - a_1)\, \text{sn}^2 u},$$

la (15) dà

$$\frac{\partial^2 \log \text{sn}\, u}{\partial u^2} = k^2\, \text{sn}^2 u - \frac{1}{\text{sn}^2 u},$$

formola pure conosciuta.

6. Oltre la serie delle $2n + 1$ funzioni Abeliane $p_1, p_2, \ldots p_{2n+1}$, che denomineremo *funzioni Abeliane ad indice unico,* e le quali, come si è veduto sopra, corrispondono alle tre funzioni ellittiche, il sig. WEIERSTRASS, nella Memoria citata, considera una seconda serie di funzioni Abeliane definite dalla equazione:

$$p_{m\mu} = -p_{\mu m} = p_m\, p_\mu \sum_1^n \frac{\Delta(x_\nu)}{(x_\nu - a_m)(x_\nu - a_\mu)\, \varphi'(x_\nu)}, \tag{16}$$

essendo m, μ due qualsivogliano fra i numeri $1, 2, \ldots 2n + 1$, ma differenti fra loro. Queste funzioni, *a due indici,* non differiscono che di una costante da quelle ad un indice pel caso delle funzioni ellittiche, giacchè si hanno le

$$p_{12} = -\frac{p_3}{a_2 - a_1}, \qquad p_{13} = -\frac{p_2}{a_3 - a_1}, \qquad p_{23} = \frac{p_1}{a_3 - a_2},$$

e, pel caso delle trascendenti ultra-ellittiche di prima specie, sono le dieci funzioni già

considerate dal ROSENHAIN *), le quali insieme alle cinque p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 costituiscono il sistema completo delle funzioni, che si presentano nello studio di quelle trascendenti come le tre $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ in quelle delle trascendenti ellittiche.

Osserviamo che, allorquando m o μ sieno $\leqq n$, le funzioni Abeliane a doppio indice si ponno esprimere in funzione di quelle ad indice unico e delle loro derivate rispetto agli argomenti $u_1, u_2, \ldots$ Infatti, indicando con r un numero della serie $1, 2, \ldots n$, e rammentando essere

$$(17) \qquad \sum_1^n \frac{\Delta(x_i)}{(x_i - a_m)(x_i - a_r)\varphi'(x_i)} = \frac{1}{U_r}\frac{\partial \log p_m}{\partial u_r},$$

si avrà:

$$(18) \qquad p_{m,r} = \frac{1}{U_r} p_r \frac{\partial p_m}{\partial u_r} = \frac{P'(a_r)}{Q(a_r)}\frac{1}{p_r}\frac{\partial p_m}{\partial u_r}.$$

Supponiamo ora che r sia un numero della serie $1, 2, \ldots n$ differente da m e da μ; le equazioni (16), (18) dànno:

$$\frac{\partial p_{m,\mu}}{\partial u_r} = \frac{Q(a_r)}{P'(a_r)} p_r p_{m,\mu}\left(\frac{p_{m,r}}{p_m} + \frac{p_{\mu,r}}{p_\mu}\right) + p_m p_\mu \frac{\partial}{\partial u_r}\sum_1^n \frac{\Delta(x_i)}{(x_i - a_m)(x_i - a_\mu)\varphi'(x_i)};$$

ossia per l'una o l'altra delle equazioni, dalla somma delle quali si è dedotta la (5), si ha:

$$\frac{\partial p_{m,\mu}}{\partial u_r} = \frac{Q(a_r)}{P'(a_r)}\left[p_r p_{m,\mu}\left(\frac{p_{m,r}}{p_m} + \frac{p_{\mu,r}}{p_\mu}\right) + \frac{a_m - a_r}{a_r - a_\mu}\frac{p_{m,r}}{p_m}(p_\mu p_{m,r} - 2 p_r p_{m,\mu}) + \frac{a_\mu - a_m}{a_r - a_\mu}\frac{p_{m,\mu}^2 p_r^2}{p_m p_\mu}\right]$$

o riducendo, coll'osservare che pel valore (16) di $p_{m,\mu}$ si ha la equazione identica

$$(a_\mu - a_r) p_r p_{m,\mu} + (a_r - a_m) p_m p_{\mu,r} + (a_m - a_\mu) p_\mu p_{m,r} = 0,$$

ottiensi la

$$(19) \qquad \frac{\partial p_{m,\mu}}{\partial u_r} = \frac{Q(a_r)}{P'(a_r)} p_{m,r} p_{\mu,r};$$

ed analogamente avremo, in causa della (6),

$$(20) \qquad \frac{\partial p_{m,r}}{\partial u_r} = \frac{p_{m,r}}{p_r}\frac{\partial p_r}{\partial u_r} - \frac{1}{a_r - a_m}\frac{p_m}{p_r};$$

ma la derivata $\frac{\partial p_r}{\partial u}$ può esprimersi razionalmente per mezzo di funzioni Abeliane ad indice unico e doppio, dunque la stessa proprietà verificasi per le derivate prime delle

*) *Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes*, etc. [Recueil des Savants étrangers, t. XI [illegible], p. [illegible].

Per queste ultime si ottengono dalla (19) le due seguenti:

$$(23) \qquad \sum_1^n \frac{\partial p_{m,\mu}}{\partial u_r} = A p_m p_\mu , \qquad \sum_1^n \frac{1}{a_\lambda - a_r} \frac{\partial p_{m,\mu}}{\partial u_r} = - p_{m,\lambda} p_{\mu,\lambda} .$$

8. Si indichino con q_m, $q_{m,\mu}$ due serie di funzioni Abeliane della specie delle superiori, gli argomenti delle quali sieno v_1, v_2, ... v_n; e con t_m, $t_{m,\mu}$ altre due serie di cui gli argomenti sieno i binomj:

$$u_1 + v_1 = w_1 , \qquad u_2 + v_2 = w_2 , \qquad . \; . \; . \qquad u_n + v_n = w_n .$$

Sieno $F(x)$, $f(x)$ due polinomj dei gradi n, $n-1$:

$$F(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n ,$$

$$f(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1} ,$$

e pongasi

$$(24) \qquad F^2(x) P(x) - f^2(x) Q(x) = \varphi(x) \psi(x) \chi(x),$$

essendo come sopra

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n),$$

$$\psi(x) = (x - y_1)(x - y_2) \ldots (x - y_n),$$

$$\chi(x) = (x - z_1)(x - z_2) \ldots (x - z_n);$$

si avrà pel teorema di Abel:

$$\sum_1^n \int^{x_i} \frac{P(x)}{(x - a_r) \Delta(x)} d x + \sum_1^n \int_{a_i}^{y_i} \frac{P(x)}{(x - a_r) \Delta(x)} d x = \sum_1^n \int_{a_i}^{z_i} \frac{P(x)}{(x - a_r) \Delta(x)} d x ;$$

per cui, facendo analogamente alla (10)

$$\frac{1}{2} \sum_1^n \int_{a_i}^{y_i} \frac{P(x)}{(x - a_r) \Delta(x)} d x = v_r ,$$

si avrà:

$$\frac{1}{2} \sum_1^n \int_{a_i}^{z_i} \frac{P(x)}{(x - a_r) \Delta(x)} d x = w_r .$$

Ora dalla (24) si ha:

$$- F(x) = \Delta(x) \frac{f(x)}{P(x)},$$

ossia

$$- F(x) = \Delta(x) \sum_1^n \frac{f(a_r)}{(x - a_r) P'(a_r)} ;$$

quindi, dividendo un membro e l'altro per $(x_s - a_m)\varphi'(x_s)$, si otterrà per la (17):

$$-1+\frac{F(a_m)}{\varphi(a_m)}=\sum_1^n \frac{f(a_r)}{P'(a_r)}\,\frac{1}{U_r}\,\frac{\partial \log p_m}{\partial u_r},$$

ma

$$\varphi(a_m)=l_m p_m^2$$

e per la (24):

$$\frac{f(a_r)}{Q(a_r)}=p_r q_r t_r;$$

dunque:

$$-l_m p_m^2+F(a_m)=l_m p_m \sum_1^n \frac{q_r t_r}{p_r}\,\frac{\partial p_m}{\partial u_r}.$$

Affatto analogamente si otterrà:

$$-l_m q_m^2+F(a_m)=l_m q_m \sum_1^n \frac{p_r t_r}{q_r}\,\frac{\partial q_m}{\partial u_r};$$

quindi sottraendo si giungerà alla

(25) $$p_m^2-q_m^2=\frac{1}{2}\sum_1^n \frac{t_r}{p_r q_r}\left(p_r^2\frac{\partial q_m^2}{\partial u_r}-q_r^2\frac{\partial p_m^2}{\partial u_r}\right).$$

Dunque le funzioni Abeliane $t_1, t_2, \ldots t_n$ si ponno esprimere razionalmente in funzione delle $p_1, p_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots$ e delle loro derivate prime. Si possono dare a quest'ultima equazione due altre forme, distinguendo i due casi di $m \leqq n$ e di $m > n$; e si avrà:

(26) per $m \leqq n$, $$\frac{Q(a_m)}{P'(a_m)}(p_m^2-q_m^2)=\sum_1^n \frac{Q(a_r)}{P'(a_r)}\,t_r\left(p_r\frac{\partial q_m}{\partial u_r}-q_r\frac{\partial p_m}{\partial u_r}\right),$$

(27) per $m > n$, $$p_m^2-q_m^2=\sum_1^n \frac{Q(a_r)}{P'(a_r)}\,t_r\,(\text{[illegible]}-\text{[illegible]}),$$

come facilmente deducesi da relazioni anteriori.

Dalla equazione (24) si ha inoltre:

$$-f(x)=\Delta(x)\sum_1^{m}\frac{F(a_{n+r})}{(x-a_{n+r})\,Q'(a_{n+r})},$$

quindi, dividendo per $(x_s - a_m)\varphi'(x_s)$ e sommando, ottiensi per la (16):

$$\frac{f(a_m)}{\varphi(a_m)}=\sum_1^{m-1}\frac{F(a_{n+r})}{Q'(a_{n+r})}\,\frac{1}{p_{n+r}\ldots}\ldots;$$

ma per la stessa (24):

$$F(a_{n+r})=P'(a_{n+r})\,p_{n+r}\,q_{n+r}\,t_{n+r}\ldots$$

e supponendo $m \leqq n$:

$$\frac{f(a_m)}{\varphi(a_m)} = -\frac{t_m q_m}{p_m};$$

quindi sostituendo si avrà:

$$-q_m t_m = \sum_1^{n+1} \frac{P(a_{n+r})}{Q'(a_{n+r})} t_{n+r} q_{n+r} p_{m,n+r};$$

ed analogamente:

$$-p_m t_m = \sum_1^{n+1} \frac{P(a_{n+r})}{Q'(a_{n+r})} t_{n+r} p_{n+r} q_{m,n+r}.$$

Da queste equazioni si deduce la seguente:

$$\sum_1^{n+1} \frac{P(a_{n+r})}{Q'(a_{n+r})} t_{n+r} (p_m q_{n+r} p_{m,n+r} - q_m p_{n+r} q_{m,n+r}) = 0, \tag{28}$$

ed anche, per la (26), la

$$\sum_1^{n+1} \frac{P(a_{n+r})}{Q'(a_{n+r})} t_{n+r} \sum_1^{n} \frac{Q(a_s)}{P'(a_s)} \left(q_{n+r} p_{s,n+r} \frac{\partial p_s}{\partial u_s} - p_{n+r} q_{s,n+r} \frac{\partial q_s}{\partial v_s} \right) = \frac{Q(a_s)}{P'(a_s)} (p_s^2 - q_s^2), \tag{29}$$

per le quali la proprietà delle $t_1, t_2, \ldots t_n$, osservata superiormente, vedesi aver luogo anche per le $t_{n+1}, t_{n+2}, \ldots t_{2n+1}$.

Pel caso di $n = 1$ la (26) dà (n° 4):

$$p_1^2 - q_1^2 = t_1 \left(p_1 \frac{\partial q_1}{\partial v} - q_1 \frac{\partial p_1}{\partial u} \right) = t_1 (p_1 q_2 q_3 - q_1 p_2 p_3),$$

ossia

$$\mathrm{sn}(u+v) = \frac{\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2 v}{\mathrm{sn}\, u . \mathrm{cn}\, v . \mathrm{dn}\, v - \mathrm{sn}\, v . \mathrm{cn}\, u . \mathrm{dn}\, u}.$$

Dalla (28) si ha:

$$t_2 (q_2 p_1 p_3 - p_2 q_1 q_3) - t_3 (q_3 p_1 p_2 - p_3 q_1 q_2) = 0,$$

e dalla (29):

$$t_2 p_2 q_2 (p_3^2 - q_3^2) - t_3 p_3 q_3 (p_2^2 - q_2^2) = k'^2 (p_1^2 - q_1^2);$$

e siccome per la prima delle (21)

$$p_2^2 = 1 - p_1^2, \quad p_3^2 = 1 - k^2 p_1^2,$$

così si ha:

$$t_3 p_3 q_3 - k^2 t_2 p_2 q_2 = k'^2,$$

e quindi:

$$t_2 = \frac{q_3 p_1 p_2 - p_3 q_1 q_2}{p_1 q_2 q_3 - q_1 p_2 p_3}, \qquad t_3 = \frac{q_1 p_2 p_3 - p_1 q_2 q_3}{p_2 q_3 q_1 - q_2 p_3 p_1},$$

formole note.

È evidente che, indicando con t'_r le funzioni Abeliane ad un indice, di cui gli argomenti sono $u_1 - v_1$, $u_2 - v_2$, $\dots u_n - v_n$, si avrà analogamente alla (26):

$$(30) \qquad \frac{Q(a_m)}{P'(a_m)}(p_m^2 - q_m^2) = \sum_1^n \frac{Q(a_r)}{P'(a_r)} t'_r \left(p_r \frac{\partial q_r}{\partial v_m} + q_r \frac{\partial p_r}{\partial u_m} \right),$$

ed in conseguenza le due:

$$(31) \left\{ \begin{aligned} &\sum_1^n \frac{Q(a_r)}{P'(a_r)} \left[p_r \frac{\partial q_r}{\partial v_m}(t_r + t'_r) - q_r \frac{\partial p_r}{\partial v_m}(t_r - t'_r) \right] = 2 \frac{Q(a_m)}{P'(a_m)} (\text{[illegible]} \\ &\sum_1^n \frac{Q(a_r)}{P'(a_r)} \left[q_r \frac{\partial p_r}{\partial u_m}(t_r + t'_r) - p_r \frac{\partial q_r}{\partial v_m}(t_r - t'_r) \right] = 0; \end{aligned} \right.$$

e così per le altre (27), (28), ecc. Quindi, anche le funzioni Abeliane a doppio indice $t_{m.\mu}$ saranno esprimibili razionalmente per le p, q.

Pavia, novembre 1857.

[L., G.].

XLIV.

SULLO SVILUPPO DELLE FUNZIONI JACOBIANE SECONDO LE POTENZE ASCENDENTI DELL'ARGOMENTO. *)

Annali di Matematica pura ed applicata, serie I, tomo I [illegible]

Indicando, come d'ordinario, con $\mathrm{sn}\, u$, $\mathrm{cn}\, u$, $\mathrm{dn}\, u$ le tre funzioni ellittiche, con k il modulo per le medesime, con k' il suo complemento, si ha, come è noto, la formola **) :

$$k'^2 \frac{\partial u}{\partial k} = k \int_0^u \mathrm{cn}^2 u\, d u - k \frac{\mathrm{sn}\, u . \mathrm{cn}\, u}{\mathrm{dn}\, u} .$$

Per essa ottiensi facilmente :

$$k'^2 \frac{\partial\, \mathrm{sn}^2 u}{\partial k} = k \frac{\partial\, \mathrm{cn}^2 u}{\partial u} \int_0^u \mathrm{cn}^2 u . d u + 2 k\, \mathrm{sn}^2 u . \mathrm{cn}^2 u ;$$

quindi, ponendo

$$\int_0^u d u \int_0^u d u\, \mathrm{sn}^2 u = \varphi(u) ,$$

---

*) Rivista bibliografica: WEIERSTRASS, *Theorie der Abel'schen Functionen* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LII (1856), pp. 285-380 (p. 356)]. — JACOBI, *Darstellung der elliptischen Functionen durch Potenzreihen* (Aus den hinterlassenen Papieren von C. G. J. JACOBI mitgetheilt durch C. W. BORCHARDT [Ibid, t. LIV (1857), pp. 82-97].

**) GUDERMANN, *Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale* [Ibid., t. XVIII (1838), pp. 1-54, 142-175, 220-258, 303-364 (p. 350)].

si ha:

$$k'^2 \frac{\partial \varphi(u)}{\partial k} = 2k \int_0^u du \int_0^u du \, \mathrm{sn}^2 u . \mathrm{cn}^2 u + k \int_0^u du \int_0^u du \left(\frac{\partial \, \mathrm{cn}^2 u}{\partial u} \int_0^u \mathrm{cn}^2 u \, du \right),$$

ossia

$$k'^2 \frac{\partial \varphi(u)}{\partial k} = k \left[\int_0^u du \int_0^u du (2 \, \mathrm{sn}^2 u . \mathrm{cn}^2 u - \mathrm{cn}^4 u) + \frac{1}{2} \left(\int_0^u \mathrm{cn}^2 u \, du \right)^2 \right].$$

Ma

$$2k^2 \int_0^u du \int_0^u du (2 \, \mathrm{sn}^2 u . \mathrm{cn}^2 u - \mathrm{cn}^4 u) = 2k'^2 \left[\tfrac{1}{2} u^2 - 2\varphi(u) \right] - \mathrm{sn}^2 u,$$

dunque:

$$2kk'^2 \frac{\partial \varphi(u)}{\partial k} = k'^2 u^2 - 4k'^2 \varphi(u) - \mathrm{sn}^2 u + k^2 \left(\int_0^u \mathrm{cn}^2 u \, du \right)^2,$$

ovvero, essendo $\mathrm{cn}^2 u = 1 - \mathrm{sn}^2 u$,

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \varphi(u)}{\partial u^2} - k^2 \left(\frac{\partial \varphi(u)}{\partial u} \right)^2 + 2k^2 u \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u} + 4k'^2 \varphi(u) - u^2 + 2kk'^2 \frac{\partial \varphi(u)}{\partial k} = 0.$$

Jacobi alla pag. 145 dei « *Fundamenta nova* » definisce $\Theta(u)$ per mezzo dell'equazione:

$$\Theta(u) = \sqrt{\frac{2Kk'}{\pi}} \, e^{\frac{1}{2} u^2 \left(1 - \frac{E}{K}\right) - k^2 \varphi(u)},$$

essendo K, E le funzioni complete di prima e seconda specie.

Ora, ponendo

$$\Phi(u) = e^{-k^2 \varphi(u)},$$

si ha:

$$\log \Phi(u) = -k^2 \varphi(u),$$

e l'equazione (1) darà:

$$\frac{\partial^2 \log \Phi}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial \log \Phi}{\partial u} \right)^2 + 2k^2 u \frac{\partial \log \Phi}{\partial u} + k^2 u^2 + 2kk'^2 \frac{\partial \log \Phi}{\partial k} = 0,$$

oppure:

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + 2k^2 u \frac{\partial \Phi}{\partial u} + k^2 u^2 \Phi + 2kk'^2 \frac{\partial \Phi}{\partial k} = 0.$$

Ora, supponendo la funzione $\Phi(u)$ sviluppabile secondo le potenze ascendenti dell'argomento, si avrà evidentemente:

$$\Phi(u) = 1 + A_1 u^2 + A_2 u^4 + A_3 u^6 + A_4 u^8 + \dots,$$

XLV.

INTORNO AD UN TEOREMA DEL SIGNOR BORCHARDT. *)

Annali di Matematica pura ed applicata, serie I, tomo I (1858) pp. 43-44.

Sieno $x_1, x_2, \ldots x_n$ le radici dell'equazione:

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0.$$

Indicando con Δ, P i determinanti:

$$\begin{vmatrix} x^n & x^{n-1} & \ldots & x & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \ldots & x_1 & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \ldots & x_2 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \ldots & x_n & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \ldots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \ldots & x_2 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \ldots & x_n & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial \Delta}{\partial x^n},$$

si ha, come è noto,

$$f(x) = \frac{\Delta}{P}.$$

Si moltiplichino i termini della funzione del secondo membro pel determinante

$$\sum (\pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n})$$

---

*) Rivista bibliografica: BORCHARDT. Monatsberichte der Akademie zu Berlin, a. 1857, p. 301.

ponendolo, nell'eseguire la moltiplicazione col numeratore, sotto la forma:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & a_{n,1} \\ 0 & a_{1,2} & a_{2,2} & \dots & a_{n,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{1,n} & a_{2,n} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Suppongasi

$$a_{r,s} = \frac{x_s^{2(r-1)}}{f'(x_s)} + A_1 \frac{x_s^{2(r-2)}}{f'(x_s)} + A_2 \frac{x_s^{2(r-3)}}{f'(x_s)} + \dots + A_{r-1} \frac{1}{f'(x_s)},$$

essendo A_1, A_2, ... coefficienti indeterminati; e pongasi

$$(1) \qquad t_{2r-s-1} = a_{r,1} x_1^{n-s} + a_{r,2} x_2^{n-s} + \dots + a_{r,n} x_n^{n-s};$$

si avranno evidentemente le $t_0 = 1$, $t_{-1} = t_{-2} = \dots = 0$, per cui:

$$f(x) = \frac{\nabla}{Q},$$

essendo

$$\nabla = \begin{vmatrix} x^n & x^{n-1} & x^{n-2} & \dots & x & 1 \\ t_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ t_3 & t_2 & t_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{2n-1} & t_{2n-2} & t_{2n-3} & \dots & t_n & t_{n-1} \end{vmatrix}, \qquad Q = \frac{\partial \nabla}{\partial x^n}.$$

Ora, per l'equazione (1) saranno le t_1, t_2, ... legate fra loro dalle

$$t_1 + a_1 = 0,$$

$$t_3 + a_1 t_2 + a_2 t_1 + a_3 = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$t_{2n-1} + a_1 t_{2n-2} + \dots + a_n t_{n-1} = 0,$$

ed inoltre, ponendo

$$S_r = \sum_1^n \frac{x_s^{n+r-1}}{f'(x_s)},$$

si avranno le

$$t_{2m} = S_{2m} + A_1 S_{2m-2} + A_2 S_{2m-4} + \dots + A_m S_0,$$

$$t_{2m+1} = S_{2m+1} + A_1 S_{2m-1} + A_2 S_{2m-3} + \dots + A_m S_1.$$

Si indichi con s_r la somma delle potenze r^{esime} delle radici $x_1, x_2, \dots x_n$; si hanno, come è noto, le relazioni:

$$r S_r = s_1 S_{r-1} + s_2 S_{r-2} + \dots + s_r S_0,$$

per le quali, supponendo che le $A_1, A_2, \dots$ soddisfino le equazioni:

$$s_2 + 2A_1 = 0,$$

$$s_4 + A_1 s_2 + 4A_2 = 0,$$

$$s_6 + A_1 s_4 + A_2 s_2 + 6A_3 = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

si otterranno le seguenti:

$$2m t_{2m} = s_1 t_{2m-1} + s_2 t_{2m-2} + \dots + s_{2m-1} t_1,$$

$$(2m+1) t_{2m+1} = s_1 t_{2m} + s_3 t_{2m-2} + \dots + s_{2m-1} t_2 + s_{2m+1}.$$

Abbiamo così il seguente teorema dovuto al sig. BORCHARDT:

« Se le radici $x_1, x_2, \dots x_n$ della equazione $f(x) = 0$ sono disuguali fra loro, i « coefficienti $a_1, a_2, \dots a_n$ della medesima, e quindi tutte le funzioni simmetriche di « quelle radici, sono esprimibili per funzioni razionali delle n quantità $s_1, s_2, \dots s_{2n-1}$ ».

Pavia, dicembre 1857.

[Pa.].

XLVI.

DIMOSTRAZIONE DI UNA FORMOLA DI JACOBI.

Annali di Matematica pura ed applicata. [illegible]

Nella Nota « *Sopra una costruzione del teorema di* Abel » *), il prof. Genocchi ha ottenuto, quale caso particolare di una sua formola [form. (9)], una relazione data senza dimostrazione da Jacobi nella lettera diretta all'Hermite, ed inserita nel 1° volume delle sue *Opere* (p. 361). Parmi di qualche interesse il mostrare come mediante considerazioni analoghe a quelle di cui fece uso il Genocchi in quella Nota, si possa giungere anche alla prima delle relazioni enunciate da Jacobi.

Siano $f(x, y) = 0$, $\lambda(x, y) = 0$ due equazioni a due incognite rispettivamente dei gradi n ed m; e $\psi(x, y)$ una funzione razionale, intera, delle x, y, del grado $n + m - 3$; si ha:

$$(1) \qquad \sum \frac{\psi(x, y)}{f'(x)\lambda'(y) - f'(y)\lambda'(x)} = 0,$$

essendo la sommatoria estesa a tutti i valori delle x, y che sono soluzioni comuni delle due equazioni.

Sia s l'arco della linea rappresentata dall'equazione $f(x, y) = 0$; si hanno le

$$dx = \frac{ds.f'(y)}{\sqrt{f'^2(x) + f'^2(y)}}, \qquad dy = -\frac{ds.f'(x)}{\sqrt{f'^2(x) + f'^2(y)}},$$

*) Annali di Matematica pura ed applicata, s. I, t. I [illegible] p. 33.

quindi:

$$\lambda'(x)\,dx + \lambda'(y)\,dy = \frac{ds}{\sqrt{f'^2(x)+f'^2(y)}}\,[\lambda'(x)f'(y) - \lambda'(y)f'(x)];$$

ovvero, per la (1),

$$(2)\qquad \sum \frac{\psi(x,\,y)\,ds}{[\lambda'(x)\,dx + \lambda'(y)\,dy]\sqrt{f'^2(x)+f'^2(y)}} = 0.$$

Sia

$$\lambda(x,\,y) = A + Bx + Cy;$$

le coordinate X, Y di un punto della linea inviluppo della retta $\lambda = 0$ hanno i valori:

$$X = -\frac{A\,dC - C\,dA}{B\,dC - C\,dB}, \qquad Y = \frac{A\,dB - B\,dA}{B\,dC - C\,dB};$$

quindi la distanza δ di questo punto di contatto da uno dei punti di intersezione della retta $\lambda = 0$ colla linea $f = 0$, sarà data dalla

$$\delta^2 = \left(x + \frac{A\,dC - C\,dA}{B\,dC - C\,dB}\right)^2 + \left(y - \frac{A\,dB - B\,dA}{B\,dC - C\,dB}\right)^2.$$

Ora, essendo x, y le coordinate di un punto comune alle $\lambda = 0$, $f = 0$, si hanno identicamente le

$$A + Bx + Cy = 0, \qquad dA + x\,dB + y\,dC + B\,dx + C\,dy = 0,$$

per le quali:

$$\frac{1}{\delta} = \pm\frac{B\,dC - C\,dB}{(B\,dx + C\,dy)\sqrt{B^2 + C^2}};$$

ma

$$B\,dx + C\,dy = \lambda'(x)\,dx + \lambda'(y)\,dy,$$

dunque per la (2):

$$\sum \frac{\psi(x,\,y)\,ds}{\delta\sqrt{f'^2(x)+f'^2(y)}} = 0,$$

essendo $\psi(x,\,y)$ del grado $n - 2$.

Gennajo 1858.

[Pa.].

XLVII.

INTORNO AD UNA FORMOLA DI INTEGRALI DEFINITI. *)

Annali di Matematica pura ed applicata, [illegible].

Posto

$$\varphi^{(r)}(x) = \frac{d^r \varphi(x)}{d x^r}, \qquad S_r = \int_a^b e^{-mx} \varphi^{(r)}(x)\, d x$$

ed

$$A_{r-1} = e^{-mb} \varphi^{(r-1)}(b) - e^{-ma} \varphi^{(r-1)}(a),$$

la integrazione a parti dà

$$S_r = A_{r-1} + m S_{r-1}.$$

Moltiplicando questa equazione e quelle che deduconsi da essa cambiando la r in $r-1$, $r-2$, ... 2, 1 ordinatamente per 1, m, m^2, ... m^{r-1}, e sommandole, si ottiene:

$$S_r = A_{r-1} + m A_{r-2} + m^2 A_{r-3} + \ldots + m^{r-1} A_0 + m^r S_0.$$

Indicando con Δ il simbolo di differenza finita rispetto al numero intero m, si avrà quindi:

$$\Delta^n S_r = \Delta^n A_{r-1} + \Delta^n (m A_{r-2}) + \ldots + \Delta^n (m^{r-1} A_0) + \Delta^n (m^r S_0);$$

e supponendo che i limiti a, b annullino le espressioni

$$\Delta^n A_{r-1}; \quad \Delta^n A_{r-2}, \quad \Delta^{n-1} A_{r-2}; \quad \ldots; \quad \Delta^n A_0, \quad \Delta^{n-1} A_0, \quad \ldots \quad \Delta^{n-r+1} A_0,$$

---

*) Rivista bibliografica: SCHLÖMILCH, *Transformation eines bestimmten Integrals* [Berichte der Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, t. IX (1857), p. 181].

si otterrà la formola di trasformazione:

$$\Delta^n S_r = \Delta^n (m^r S_0),$$

ossia

$$\int_a^b (1 - e^{-x})^n e^{-mx} \varphi^{(r)}(x)\, dx = (-1)^n \Delta^n \left[m^r \int_a^b e^{-mx} \varphi(x)\, dx \right].$$

L'Autore, applicando questa formola generale al caso in cui

$$a = 0, \qquad b = \infty, \qquad \varphi(x) = \log x, \qquad n > r - 1,$$

giunge al seguente risultato:

$$\int_0^\infty \frac{(1 - e^{-x})^n}{x^r} e^{-mx}\, dx = \frac{(-1)^{n+r}}{\Gamma(r-1)} \Delta^n (m^{r-1} \log m);$$

il quale nel caso speciale di $r = n$ coincide con uno trovato dall'Eulero nel t. IV delle « *Institutiones Calculi integralis* » (p. 271). Da questo risultato mediante la derivazione rispetto ad r deducesi il seguente:

$$\int_0^\infty (1 - e^{-x})^n . e^{-mx} x^{s-1}\, dx = (-1)^n \Gamma(s) \Delta^n \left(\frac{1}{m} \right),$$

od anche:

$$\int_0^1 x^{m-1} (1 - x)^n \log \left(\frac{1}{x} \right)^{s-1} dx = (-1)^n \Gamma(s) \Delta^n \left(\frac{1}{m^s} \right).$$

(Abel, *Œuvres complètes*, t. II, p. 35).

Pavia, febbrajo 1858.

[Pa.].

XLVIII.

SUI COVARIANTI DELLE FORME A PIÙ VARIABILI.

Annali di Matematica pura ed applicata, [illegible]

1. Supponiamo che, operando sulla funzione omogenea $f(x_1, x_2, \ldots x_m)$, del grado n, la sostituzione lineare

$$(1) \qquad x_r = a_{r,1} y_1 + a_{r,2} y_2 + \ldots + a_{r,m} y_m,$$

ottengasi la

$$F(y_1, y_2, \ldots y_m) = \sum \frac{\Pi n}{\Pi \alpha_1 . \Pi \alpha_2 \ldots \Pi \alpha_m} (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m) y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \ldots y_m^{\alpha_m},$$

nella quale: le $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ devono assumere tutti i valori 0, 1, 2, ... n che soddisfano alla equazione $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = n$, e $\Pi n = 1 . 2 . 3 \ldots n$. Se con Q_r indichiamo il simbolo di operazione

$$a_{1,r} \frac{\partial}{\partial a_{1,1}} + a_{2,r} \frac{\partial}{\partial a_{2,1}} + \ldots + a_{m,r} \frac{\partial}{\partial a_{m,1}},$$

si ha, per lo sviluppo di Taylor,

$$\frac{\Pi n}{\Pi \alpha_1 . \Pi \alpha_2 \ldots \Pi \alpha_m} (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m) = \frac{Q_2^{\alpha_2} Q_3^{\alpha_3} \ldots Q_m^{\alpha_m}}{\Pi \alpha_2 . \Pi \alpha_3 \ldots \Pi \alpha_m} f(a_{1,1}, a_{2,1}, \ldots a_{m,1}),$$

ed altre $m - 1$ analoghe operando coi simboli Q_{r}, Q_{r}, ... Q_{r}. Si avrà quindi:

$$(2) \qquad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m) = \frac{\Pi \alpha_1}{\Pi n} Q_2^{\alpha_2} Q_3^{\alpha_3} \ldots Q_m^{\alpha_m} f(a_{1,1}, a_{2,1}, \ldots a_{m,1}).$$

Ora, osservando che la espressione del secondo membro di questa equazione è omogenea rispetto alle $a_{1,1}, a_{2,1}, \ldots a_{m,1}$ e del grado α_1, operando col simbolo $Q_{1,1}$ sui due membri dell'equazione medesima, si otterrà:

$$Q_{1,1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m) = \frac{\Pi \alpha_1}{\Pi n} \alpha_1 Q_{2,1}^{\alpha_2} Q_{3,1}^{\alpha_3} \ldots Q_{m,1}^{\alpha_m} f(a_{1,1}, a_{2,1}, \ldots a_{m,1}),$$

ossia, per la (2),

$$Q_{1,1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m) = \alpha_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m),$$

od in generale:

$$Q_{s,s}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m) = \alpha_s(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m), \tag{3}$$

per $s = 1, 2, \ldots m$. Dalla (2) deducesi facilmente la

$$(\alpha_1 - 1, \alpha_2 + 1, \alpha_3, \ldots \alpha_m) = \frac{\Pi \alpha_1}{\alpha_1 \Pi n} Q_{2,1}^{\alpha_2+1} Q_{3,1}^{\alpha_3} \ldots Q_{m,1}^{\alpha_m} f(a_{1,1}, a_{2,1}, \ldots a_{m,1})$$

ed altre analoghe; quindi per la stessa (2) si avrà:

$$Q_{2,1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m) = \alpha_1(\alpha_1 - 1, \alpha_2 + 1, \alpha_3, \ldots \alpha_m),$$

od in generale:

$$Q_{s,r}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m) = \alpha_r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r - 1, \ldots \alpha_s + 1, \ldots \alpha_m) \tag{4}$$

per $s, r = 1, 2, \ldots m$, ma differenti fra loro.

Consideriamo ora una funzione $V(y_1, y_2, \ldots y_m)$ dei coefficienti $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m)$ della forma F e delle indeterminate $y_1, y_2, \ldots y_m$. Indicando per brevità con Q il simbolo di operazione $Q_{s,r}$, si ha:

$$Q[V(y_1, y_2, \ldots y_m)] = Q(V) + \frac{\partial V}{\partial y_1} Q(y_1) + \frac{\partial V}{\partial y_2} Q(y_2) + \cdots + \frac{\partial V}{\partial y_m} Q(y_m), \tag{5}$$

supponendo che in $Q(V)$ la operazione Q non affetti che i coefficienti; ma ponendo

$$\Delta = \sum(\pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{m,m}), \qquad \alpha_{r,s} = \frac{\partial \Delta}{\partial a_{r,s}},$$

dalle (1) si deducono le

$$\Delta y_r = \alpha_{1,r} x_1 + \alpha_{2,r} x_2 + \cdots + \alpha_{m,r} x_m,$$

dunque:

$$Q(y_r) = \frac{1}{\Delta}[x_1 Q(\alpha_{1,r}) + x_2 Q(\alpha_{2,r}) + \cdots + x_m Q(\alpha_{m,r})] - \frac{y_r}{\Delta} Q(\Delta).$$

Da questa relazione si ottengono le seguenti:

$$Q_{rr}(y_s) = 0,\quad Q_{rs}(y_r) = 0,\quad Q_{rr}(y_r) = -y_r,\quad Q_{rs}(y_s) = -y_r,\quad Q_{rs}(y_t) = 0,$$

ed in conseguenza dall'equazione (5) si hanno le:

$$(6)\qquad \begin{cases} Q_{rr}[V(y_1, y_2, \ldots y_m)] = Q_{rr}(V) - y_r \dfrac{\partial V}{\partial y_r}, \\ Q_{rs}[V(y_1, y_2, \ldots y_m)] = Q_{rs}(V) - y_s \dfrac{\partial V}{\partial y_r}. \end{cases}$$

2. Sia $U(x_1, x_2, \ldots x_m)$ un covariante della forma $f(x_1, x_2, \ldots x_m)$; e supponiamo che trasformandolo mediante la sostituzione lineare (1) ottengasi $V(y_1, y_2, \ldots y_m)$ covariante di F; si avrà per la definizione di un covariante:

$$(7)\qquad V(y_1, y_2, \ldots y_m) = \Delta^p . U(x_1, x_2, \ldots x_m).$$

Ora, essendo per proprietà dei determinanti:

$$Q_{rr}(\Delta) = \Delta,\qquad Q_{rs}(\Delta) = 0,$$

la equazione superiore darà:

$$Q_{rr}[V(y_1, y_2, \ldots y_m)] = p\, V(y_1, y_2, \ldots y_m),\quad Q_{rs}[V(y_1, y_2, \ldots y_m)] = 0;$$

e quindi, in questo caso, si dedurranno dalle (6) le

$$(8)\qquad Q_{rr}(V) - y_r \frac{\partial V}{\partial y_r} = p V,\qquad Q_{rs}(V) - y_s \frac{\partial V}{\partial y_r} = 0.$$

Se da ultimo osserviamo che

$$Q_{rr}(V) = \sum \frac{\partial V}{\partial(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m)} Q_{rr}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m),$$

$$Q_{rs}(V) = \sum \frac{\partial V}{\partial(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m)} Q_{rs}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m),$$

sostituendo e rammentando le relazioni (3), (4) si avranno le seguenti:

$$(9)\qquad \begin{cases} \sum \alpha_r (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m) \dfrac{\partial V}{\partial(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m)} - y_r \dfrac{\partial V}{\partial y_r} = p V, \\ \sum \alpha_s (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_r - 1, \ldots \alpha_s + 1, \ldots \alpha_m) \dfrac{\partial V}{\partial(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m)} - y_s \dfrac{\partial V}{\partial y_r} = 0. \end{cases}$$

Il covariante F della forma $F(y_1, y_2, \ldots y_m)$ deve dunque soddisfare a queste equazioni; ma osservando che nelle medesime non vi è più traccia di operazioni relative ai coefficienti della sostituzione lineare, ne risulta che il covariante U della forma f dovrà soddisfare ad equazioni della medesima forma, nelle quali le $x_1, x_2, \ldots x_m$ prendano il posto delle $y_1, y_2, \ldots y_m$ ed i coefficienti della funzione f quello dei coefficienti della F. Notiamo che, supponendo U del grado h rispetto ai coefficienti di f, e del grado k rispetto alle variabili $x_1, x_2, \ldots x_m$, dalla equazione (7) si ha evidentemente la eguaglianza:

$$nh = mp + k$$

e da questa:

$$p = \frac{1}{m}(nh - k).$$

3. Supponiamo

$$F(y_1, y_2, \ldots y_m) = \sum \frac{\Pi k}{\Pi c_1 . \Pi c_2 \ldots \Pi c_m} (c_1, c_2, \ldots c_m) y_1^{c_1} y_2^{c_2} \ldots y_m^{c_m},$$

nella quale $c_1, c_2, \ldots c_m$ si intendano assumere tutti i valori 0, 1, 2, ... k che soddisfano all'equazione $c_1 + c_2 + \ldots + c_m = k$. I coefficienti $(c_1, c_2, \ldots c_m)$ essendo funzioni degli $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m)$, si avrà:

$$Q_{rs}(F) = \sum \frac{\Pi k}{\Pi c_1 . \Pi c_2 \ldots \Pi c_m} y_1^{c_1} y_2^{c_2} \ldots y_m^{c_m} Q_{rs}(c_1, c_2, \ldots c_m),$$

ed osservando che

$$\frac{\partial F}{\partial y_s} = \sum \frac{\Pi k}{\Pi c_1 . \Pi c_2 \ldots \Pi c_m} c_s (c_1, c_2, \ldots c_m) y_1^{c_1} y_2^{c_2} \ldots y_s^{c_s - 1} \ldots y_m^{c_m}$$

od anche

$$\frac{\partial F}{\partial y_s} = \sum \frac{\Pi k}{\Pi c_1 . \Pi c_2 \ldots \Pi c_m} c_s (c_1, c_2, \ldots c_r - 1, \ldots c_s + 1, \ldots c_m) y_1^{c_1} \ldots y_r^{c_r - 1} \ldots y_m^{c_m},$$

si otterrà per la seconda delle equazioni (8) la seguente:

$$Q_{rs}(c_1, c_2, \ldots c_m) = c_s(c_1, \ldots c_r - 1, \ldots c_s + 1, \ldots c_m); \tag{10}$$

ed analogamente, essendo

$$y_s \frac{\partial F}{\partial y_s} = \sum \frac{\Pi k}{\Pi c_1 . \Pi c_2 \ldots \Pi c_m} c_s (c_1, c_2, \ldots c_m) y_1^{c_1} y_2^{c_2} \ldots y_m^{c_m},$$

si avrà, per la prima delle (8), la

$$Q_{ss}(c_1, c_2, \ldots c_m) = (p + c_s)(c_1, c_2, \ldots c_m). \tag{11}$$

La equazione (10) dimostra che, conoscendosi il valore di uno dei coefficienti $(c_1, c_2, \dots c_m)$, quelli degli altri si ponno dedurre dal medesimo. Infatti, supponiamo noto il coefficiente di y_1^k, pel quale $c_1 = k$, $c_2 = c_3 = \dots = c_m = 0$. Dalla (10) si hanno le

$$(k-1, 1, 0, 0, \dots 0) = \frac{1}{k} Q_{2,1}(k, 0, 0, \dots 0),$$

$$(k-1, 0, 1, 0, \dots 0) = \frac{1}{k} Q_{3,1}(k, 0, 0, \dots 0),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

cioè i valori dei coefficienti di $y_1^{k-1} y_2$, $y_1^{k-1} y_3$, ... Così dalle

$$(k-2, 2, 0, \dots 0) = \frac{1}{k-1} Q_{2,1}(k-1, 1, 0, \dots 0),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

si hanno i coefficienti di $y_1^{k-2} y_2^2$, ... e così di seguito.

Dalle equazioni (10), (11) deduconsi inoltre quelle alle quali deve soddisfare il coefficiente $(k, 0, 0, \dots 0)$. Esse sono:

$$(12) \begin{cases} Q_{s,r}(k, 0, 0, \dots 0) = 0 \quad \text{per} \quad r = 1, 2, \dots s-1, s+1, \dots m, \\ Q_{1,1}(k, 0, 0, \dots 0) = (p+k)(k, 0, 0, \dots 0), \\ Q_{s,s}(k, 0, 0, \dots 0) = p(k, 0, \dots 0) \quad \text{per} \quad s = 2, 3, \dots m. \end{cases}$$

Ora, se con

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m)^q (\alpha'_1, \alpha'_2, \dots \alpha'_m)^{q'} (\alpha''_1, \alpha''_2, \dots \alpha''_m)^{q''} \dots$$

indicasi un termine qualsivoglia del coefficiente $(k, 0, 0, \dots 0)$, le due ultime equazioni (12) dànno:

$$\alpha_1 q + \alpha'_1 q' + \alpha''_1 q'' + \dots = p + k, \qquad \alpha_s q + \alpha'_s q' + \alpha''_s q'' + \dots = p,$$

cioè il coefficiente $(k, 0, 0, \dots 0)$ è, relativamente ai coefficienti di F, omogeneo in indice, del grado $p + k$ rispetto ai primi indici, e del grado p rispetto ai secondi, terzi, ecc.

4. Sieno φ, u_1, u_2, ... u_m, $m+1$ covarianti della forma $f(x_1, x_2, \dots x_m)$. Posto

$$H = \sum \left(\pm \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \dots \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right), \qquad [illegible] = \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial u_r}{\partial x_s}},$$

si sostituiscano nel covariante φ, in luogo delle $x_1, x_2, \ldots x_n$, le espressioni:

$$z_1 = x_1 X_1 + u_{2,1} X_2 + \ldots + u_{m,1} X_m,$$

$$z_2 = x_2 X_1 + u_{2,2} X_2 + \ldots + u_{m,2} X_m,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$z_m = x_m X_1 + u_{2,m} X_2 + \ldots + u_{m,m} X_m,$$

e si sviluppi $\varphi(z_1, z_2, \ldots z_m)$ col mezzo della formola di TAYLOR. Si avrà:

$$\varphi(z_1, z_2, \ldots z_m) = \sum \frac{\Pi s}{\Pi h_1 . \Pi h_2 \ldots \Pi h_m} (h_1, h_2, \ldots h_m) X_1^{h_1} X_2^{h_2} \ldots X_m^{h_m},$$

essendo s il grado di φ rispetto alle $x_1, x_2, \ldots x_m$ ed

$$(h_1, h_2, \ldots h_m) = \frac{\Pi h_1}{\Pi s} P_2^{h_2} P_3^{h_3} \ldots P_m^{h_m} \varphi(x_1, x_2, \ldots x_m),$$

$$P_r = u_{r,1} \frac{\partial}{\partial x_1} + u_{r,2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + u_{r,m} \frac{\partial}{\partial x_m},$$

osservando però che nell'eseguire le operazioni $P_2, P_3, \ldots$ debbonsi ritenere le quantità $u_{r,s}$ come costanti rispetto alle $x_1, x_2, \ldots x_m$; cioè che quei simboli di operazione affettano soltanto il covariante φ.

Ora, *i coefficienti* $(h_1, h_2, \ldots h_m)$ *sono covarianti della forma* f. Questo teorema è una estensione al caso di più indeterminate dell'analogo per le forme binarie dovuto al sig. HERMITE *). Se supponesi che il covariante φ sia la forma proposta f, i covarianti $(h_1, h_2, \ldots h_m)$ si diranno covarianti associati al covariante u_1.

Indichiamo per brevità con $a, b, c, \ldots$ i coefficienti della forma f, cioè sia

$$f(x_1, x_2, \ldots x_m) = (a, b, c, \ldots)(x_1, x_2, \ldots x_m)^n$$

ed

$$(a, b, c, \ldots)(z_1, z_2, \ldots z_m)^n = (f, A, B, C, \ldots)(X_1, X_2, \ldots X_m)^n.$$

I coefficienti $A, B, C, \ldots$ saranno perciò covarianti associati al covariante u_1. Sia ora $\psi(x_1, x_2, \ldots x_m)$ un covariante qualsivoglia di f; ponendo

$$M = \begin{vmatrix} x_1 & u_{2,1} & u_{3,1} & \ldots & u_{m,1} \\ x_2 & u_{2,2} & u_{3,2} & \ldots & u_{m,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_m & u_{2,m} & u_{3,m} & \ldots & u_{m,m} \end{vmatrix},$$

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LII (1856).

XLIX.

SULLE EQUAZIONI DEL MOLTIPLICATORE PER LA TRASFORMAZIONE DELLE FUNZIONI ELLITTICHE.

Annali di Matematica pura ed applicata, serie I, tomo I [illegible], pp. [illegible]

È noto come supponendo n numero dispari si soddisfi all'equazione

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{z\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}$$

mediante la sostituzione $y = \frac{U}{V}$, nella quale U, V sono due polinomj in x dei gradi n ed $n-1$; e come, ponendo

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}, \qquad K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2 x^2)}},$$

$$k^2 + k'^2 = 1, \qquad \omega = \frac{mK + m'iK'}{n},$$

dove m, m' sono due numeri interi ed $i = \sqrt{-1}$, si hanno le relazioni:

$$(1) \quad \begin{cases} \sqrt[4]{\lambda} = k^{\frac{n}{4}} \operatorname{sen\,coam} 4\omega . \operatorname{sen\,coam} 8\omega \ \dots \ \operatorname{sen\,coam} 2(n-1)\omega, \\[2mm] \sqrt{\lambda} = \sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}}} \dfrac{\operatorname{sen\,am} 4\omega . \operatorname{sen\,am} 8\omega \ \dots \ \operatorname{sen\,am} 2(n-1)\omega}{\operatorname{sen\,coam} 4\omega . \operatorname{sen\,coam} 8\omega \ \dots \ \operatorname{sen\,coam} 2(n-1)\omega}. \end{cases}$$

Se n è numero primo, si hanno $n+1$ trasformazioni dell'ennesimo ordine differenti

tra loro, le quali corrispondono agli $n+1$ seguenti valori di ω:

$$\frac{K}{n}, \quad \frac{iK'}{n}, \quad \frac{K+iK'}{n}, \quad \frac{K+2iK'}{n}, \quad \ldots \quad \frac{K+(n-1)iK'}{n};$$

e questi sostituiti nelle (1) dànno $n+1$ valori corrispondenti pel modulo λ ed $n+1$ pel moltiplicatore z. Quindi le equazioni, le radici delle quali sono quegli $n+1$ valori di λ o di z, saranno del grado $n+1$. Le prime equazioni sono denominate equazioni del modulo o modulari; alle seconde daremo il nome di equazioni del moltiplicatore.

Indicando con $z_1, z_2, \ldots z_{n+1}$ gli $n+1$ valori del moltiplicatore, e con $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \ldots$ i valori della funzione completa

$$\Lambda = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\lambda^2 x^2)}}$$

corrispondenti agli $n+1$ valori del modulo, si hanno le

$$z_1 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{n\Lambda_1}{K}, \quad z_2 = \frac{\Lambda_2}{K}, \quad \ldots \quad z_{n+1} = \frac{\Lambda_{n+1}}{K};$$

ovvero, osservando essere (*Fundamenta Nova*, pag. 184):

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m} q^{m^2},$$

si avrà per un teorema di JACOBI *) dimostrato da L. A. SOHNCKE **):

$$\sqrt{z_1} = \sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}} n}\, \frac{\sum^m q^{n m^2}}{\sum^m q^{m^2}},$$

ed i valori di $\sqrt{z_2}$, $\sqrt{z_3}$, ... si otterranno ponendo nella

$$\frac{\sum^m p^{m^2}}{\sum^m q^{m^2}}$$

in luogo di p ordinatamente $q^{\frac{1}{n}}$, $\alpha q^{\frac{1}{n}}$, $\alpha^2 q^{\frac{1}{n}}$, ... $\alpha^{n-1} q^{\frac{1}{n}}$, essendo α una radice del-

*) *Note sur les fonctions elliptiques* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. III (1828), pp. 192-195 (p. 193)].

**) *Aequationes modulares pro transformatione functionum ellipticarum* [Ibid., t. XVI (1837), pp. 97-130 (p. 103)].

l'equazione $\alpha^n - 1 = 0$. Questa proprietà dei moltiplicatori fu già dimostrata dall'Abel, ma inesattamente quanto al primo di essi *).

Ora la sommatoria $\sum^m q^{\frac{m^2}{n}}$ può decomporsi nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\sum^m q^{\frac{m^2}{n}} = 1 &+ 2q^{n} + 2q^{4n} + 2q^{9n} + \dots \\ &+ 2q^{\frac{1}{n}} \quad + 2q^{\frac{1}{n}(1+n)^2} + 2q^{\frac{1}{n}(1-n)^2} + 2q^{\frac{1}{n}(1+2n)^2} + 2q^{\frac{1}{n}(1-2n)^2} + \dots \\ &+ 2q^{\frac{4}{n}} \quad + 2q^{\frac{1}{n}(2+n)^2} + 2q^{\frac{1}{n}(2-n)^2} + 2q^{\frac{1}{n}(2+2n)^2} + 2q^{\frac{1}{n}(2-2n)^2} + \dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ 2q^{\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} + 2q^{\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{2}+n\right)^2} + 2q^{\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{2}-n\right)^2} + 2q^{\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{2}+2n\right)^2} + 2q^{\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{2}-2n\right)^2} + \dots;\end{aligned}$$

per cui, ponendo per brevità:

$$A_0 = \frac{\sum q^{nm^2}}{\sum^m q^{\frac{m^2}{n}}}, \quad A_1 = 2q^{\frac{1}{n}} \frac{\sum q^{nm^2+2m}}{\sum q^{\frac{m^2}{n}}}, \quad \dots \quad A_s = 2q^{\frac{s^2}{n}} \frac{\sum q^{nm^2+2sm}}{\sum q^{\frac{m^2}{n}}}, \quad \dots$$

si avranno le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}\sqrt{z_1} &= \sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\, n}\; A_0, \\ \sqrt{z_2} &= A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_{\frac{n-1}{2}}, \\ \sqrt{z_3} &= A_0 + \alpha A_1 + \alpha^4 A_2 + \dots + \alpha^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} A_{\frac{n-1}{2}},\end{aligned}$$

e analoghe espressioni per $\sqrt{z_4}$, $\sqrt{z_5}$, ... ponendo in quest'ultima α^2, α^3, ... in luogo di α. Questa importante proprietà delle radici delle equazioni del moltiplicatore venne pure enunciata da Jacobi **).

Quindi, supponendo $n = 3$ le A_0, A_1 dovranno soddisfare a due equazioni di condizione; le quali, essendo per questo caso

$$z^4 - 6z^2 + 8(1 - 2k^2)z - 3 = 0$$

---

*) *Sur le nombre des transformations différentes, qu'on peut faire subir à une fonction elliptique par la substitution d'une fonction donnée du premier degré* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. III (1828), pp. 394-401 (p. 400)]. — *Œuvres complètes*, t. I, p. 315.

**) *Suite des notices sur les fonctions elliptiques* [Ibid., t. III (1828), pp. 303-310 (p. [illegible])].

l'equazione del moltiplicatore, risulteranno:

$$A_0(A_0^3 + A_1^3) = 1, \qquad 8A_0^6 - 20A_0^3 A_1^3 - A_1^6 = 8(1 - 2k^2).$$

Così per $n = 5$, essendo l'equazione del moltiplicatore la

$$z^6 - 10z^5 + 35z^4 - 60z^3 + 55z^2 - 2(13 - 2^7 k^2 k'^2)z + 5 = 0,$$

o più semplicemente la

$$(z - 1)^6 - 4(z - 1)^5 + 2^8 k^2 k'^2 z = 0,$$

dal confronto dei coefficienti si otterranno le relazioni:

$$A_0^2 + A_1 A_2 = 1, \qquad 11A_0^6 - 15A_0^4 + 5A_0^2 + A_0(A_1^5 + A_2^5) = 1,$$

$$494A_0^{10} - 1170A_0^8 + 5040A_0^6 - 5880A_0^4 + 1890A_0^2 - 228A_0^5(A_1^5 + A_2^5)$$

$$+ 120A_0^3(A_1^5 + A_2^5) + 360A_0(A_1^5 + A_2^5) + A_1^{10} + A_2^{10} = 374 - 2^8 k^2 k'^2,$$

od altre dipendenti da queste. Mostreremo in un prossimo lavoro alcune conseguenze di queste proprietà delle equazioni del moltiplicatore, e come dalle medesime si possano far dipendere i risultati ottenuti recentemente dal sig. HERMITE *) intorno la risoluzione della equazione del quinto grado.

Pavia, maggio 1858.

[Tn.].

---

*) *Sur la résolution de l'équation du cinquième degré* [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XLVI (1858), p. 508].

Sieno $f(x)$, $\varphi(x)$ due polinomj rispettivamente dei gradi n, $n-1$, non aventi fattori comuni. Supponiamo che, sviluppando in frazione continua la frazione $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ ottengasi:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots + \cfrac{1}{q_n}}}$$

e che

$$\frac{N_1}{D_1}, \quad \frac{N_2}{D_2}, \quad \ldots \quad \frac{N_{n-1}}{D_{n-1}}$$

sieno le ridotte successive di questa frazione continua. Indicando con r_1, r_2, ... i residui della divisione, e con x_1, x_2, ... x_n le radici dell'equazione $f(x)=0$, si ha, come è noto,

$$r_s(x) = (-1)^s (\varphi D_s - f N_s),$$

e quindi:

$$r_s(x_i) = (-1)^s \varphi(x_i) D_s(x_i). \tag{1}$$

Ora, i polinomj r_s, D_s essendo rispettivamente dei gradi $n-s-1$ ed s, si avranno le equazioni:

$$\sum_1^n \frac{r_s(x_i)}{f'(x_i)} = 0, \qquad \sum_1^n \frac{r_s(x_i) D_i(x_i)}{f'(x_i)} = 0 \quad \text{per } i < s,$$

$$\sum_1^n \frac{r_s(x_i) D_s(x_i)}{f'(x_i)} = \frac{1}{\alpha_{s+1}},$$

essendo α_{s+1} il coefficiente di x nel quoziente q_{s+1}; ossia per la (1):

$$\sum_1^n D_s(x_i) \frac{\varphi(x_i)}{f'(x_i)} = 0, \qquad \sum_1^n D_i(x_i) D_s(x_i) \frac{\varphi(x_i)}{f'(x_i)} = 0,$$

$$\sum_1^n D_s^2(x_i) \frac{\varphi(x_i)}{f'(x_i)} = (-1)^s \frac{1}{\alpha_{s+1}}.$$

Applicando a questo caso il Lemma superiore si ottengono le relazioni:

$$\alpha_1 - \alpha_2 D_1(x_i) D_1(x_k) + \alpha_3 D_2(x_i) D_2(x_k) - \ldots + (-1)^{n-1} \alpha_n D_{n-1}(x_i) D_{n-1}(x_k) = 0,$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 D_1^2(x_i) + \alpha_3 D_2^2(x_i) - \ldots + (-1)^{n-1} \alpha_n D_{n-1}^2(x_i) = \frac{f'(x_i)}{\varphi(x_i)};$$

dalle quali deducesi facilmente:

LI.

SULLA SIMULTANEA TRASFORMAZIONE DI DUE FORME QUADRATICHE. *)

Annali di Matematica pura ed applicata, [illegible]

1. Il problema della simultanea trasformazione di due forme quadratiche, cioè della trasformazione di esse mediante una stessa sostituzione lineare, fu già scopo alle ricerche di JACOBI e di CAYLEY **). Il sig. WEIERSTRASS considera nuovamente questa importante questione, e la risolve anche in un caso non contemplato da quegli autori. Crediamo opportuno nel render conto dei risultati ottenuti dal sig. WEIERSTRASS di far conoscere in molta parte anche l'analisi per la quale giunse ai medesimi.

Si considerino le tre forme quadratiche ad n indeterminate $x_1, x_2, \ldots x_n$:

$$u = \sum\sum a_{rs} x_r x_s, \quad v = \sum\sum [illegible], \quad w = [illegible] = \sum\sum [illegible]:$$

e si indichino ordinatamente con A, B i determinanti:

$$\sum(\pm a_{11} a_{22} \ldots [illegible]), \qquad \sum(\pm [illegible] \ldots [illegible]):$$

---

*) Rivista bibliografica: [illegible] *Grades [illegible] Theorem, [illegible]* [illegible] [Monatsberichte der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, a. 1858, p. 207].

**) JACOBI, *De binis quibuslibet functionibus homogeneis secundi ordinis*, etc. [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. XII [illegible] — CAYLEY, [illegible], etc. [Cambridge and Dublin Mathematical Journal, s. II, t. IV (1849), p. 47. — The Quarterly Journal, t. II (1858), p. 192].

e con $\alpha_{r,s}$, $\beta_{r,s}$ i determinanti minori $\dfrac{\partial A}{\partial a_{r,s}}$, $\dfrac{\partial B}{\partial b_{r,s}}$ e con u_r, v_r, w_r le espressioni:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_r}, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x_r}, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x_r}.$$

Dalle equazioni:

$$u_s = a_{1,s} x_1 + a_{2,s} x_2 + \dots + a_{n,s} x_n \qquad (s = 1, 2, \dots n)$$

dedotti i valori delle x_1, x_2, ... x_n, cioè

$$x_r = \frac{1}{A} \sum \alpha_{r,s} u_s, \tag{1}$$

si sostituiscano nelle

$$u = \sum u_r x_r, \qquad v = \sum v_r x_r;$$

si avranno le

$$u = \frac{1}{A} \sum \sum \alpha_{r,s} u_r u_s, \qquad v = \frac{1}{A} \sum \sum \alpha_{r,s} v_r u_s. \tag{2}$$

Ora le equazioni:

$$w_s = b_{1,s} x_1 + b_{2,s} x_2 + \dots + b_{n,s} x_n$$

dànno anche

$$x_r = \frac{1}{B} \sum \beta_{r,s} w_s = \frac{1}{B} \sum \beta_{r,s} (\theta u_s - v_s), \tag{3}$$

ossia, osservando essere B, $\beta_{r,s}$ due funzioni intere di θ dei gradi n, $n - 1$, sviluppando il secondo membro secondo le potenze discendenti di θ, si avrà:

$$x_r = A_0 + \frac{A_1}{\theta} + \dots,$$

nella quale A_0 è evidentemente eguale a

$$\sum \left(\frac{\theta \beta_{r,s}}{B}\right)_{\theta^0} u_s = \sum \left(\frac{\beta_{r,s}}{B}\right)_{\theta^{-1}} u_s = \frac{1}{A} \sum \alpha_{r,s} u_s. \tag{4}$$

Quindi, se riteniamo che le indeterminate x_1, x_2, ... x_n sieno definite dalle equazioni (1), il secondo membro della (3) dovrà essere indipendente da θ, e si avrà:

$$A_1 = \sum \left[\frac{\beta_{r,s}}{B} (\theta u_s - v_s)\right]_{\theta^{-1}} = 0,$$

ossia

$$\sum \left(\frac{\theta \beta_{r,s}}{B}\right)_{\theta^{-1}} u_s = \sum \left(\frac{\beta_{r,s}}{B}\right)_{\theta^{-1}} v_s = \frac{1}{A} \sum \alpha_{r,s} v_s;$$

per la quale e la (4) le equazioni (2) diventano:

$$u = \sum \sum \left(\frac{\beta_{r,s}}{B}\right)_{\theta^{-1}} u_r u_s, \qquad v = \sum \sum \left(\frac{\theta \beta_{r,s}}{B}\right)_{\theta^{-1}} u_r u_s.$$

Supponiamo dapprima che la equazione $B(\theta) = 0$ non abbia radici multiple; in questo caso, indicando con $\theta_1, \theta_2, \dots \theta_n$ queste radici, si hanno le note relazioni:

$$\left(\frac{\beta_{r,s}}{B}\right)_{n-1} = \sum_1^n \frac{\beta_{r,s}(\theta_m)}{B'(\theta_m)}, \qquad \left(\frac{\theta\beta_{r,s}}{B}\right)_{n-1} = \sum_1^n \frac{\theta_m\beta_{r,s}(\theta_m)}{B'(\theta_m)},$$

per cui, ponendo

$$\sum\sum \frac{\beta_{r,s}(\theta_m)}{B'(\theta_m)} u_r u_s = p_m,$$

si avranno le trasformate:

$$u = p_1 + p_2 + \dots + p_n,$$

$$v = \theta_1 p_1 + \theta_2 p_2 + \dots + \theta_n p_n.$$

Le espressioni $p_1, p_2, \dots$ sono quadrati di funzioni lineari delle $u_1, u_2, \dots u_n$, e quindi delle $x_1, x_2, \dots x_n$; infatti, dalla teorica dei determinanti si ha che

(5) $$B\frac{\partial^2 B}{\partial b_{r,r}\,\partial b_{s,s}} = \beta_{r,r}\beta_{s,s} - \beta_{r,s}\beta_{s,r};$$

ora, osservando essere $\beta_{r,s} = \beta_{s,r}$, ponendo in quest'ultima $\theta = \theta_m$ si avrà:

$$\beta_{r,s}^2(\theta_m) = \beta_{r,r}(\theta_m)\,\beta_{s,s}(\theta_m),$$

per cui si avrà:

$$p_m = (\lambda_{1,m}u_1 + \lambda_{2,m}u_2 + \dots + \lambda_{n,m}u_n)^2 = y_m^2,$$

essendo

(6) $$\lambda_{r,m}^2 = \frac{\beta_{r,r}(\theta_m)}{B'(\theta_m)}, \qquad \lambda_{r,m}\lambda_{s,m} = \frac{\beta_{r,s}(\theta_m)}{B'(\theta_m)},$$

ed inoltre per la (1):

(7) $$x_r = \lambda_{r,1}y_1 + \lambda_{r,2}y_2 + \dots + \lambda_{r,n}y_n.$$

I valori (6) dei coefficienti della sostituzione lineare (7), nella supposizione che la equazione $B(\theta) = 0$ non abbia radici eguali, coincidono con quelli determinati con metodi differenti da Jacobi e da Cayley nelle memorie citate.

2. Il sig. Weierstrass, considerando in seguito il caso nel quale l'equazione $B(\theta) = 0$ ammetta radici multiple, dimostra il seguente teorema:

« Se la forma quadratica u non può annullarsi per valori reali delle indeterminate $x_1, x_2, \dots x_n$, fuorchè nel caso in cui le medesime sieno tutte eguali a zero, « una radice dell'equazione $B(\theta) = 0$ multipla secondo il numero μ sarà radice dell'equazione $\beta_{r,s}(\theta) = 0$ multipla secondo il numero $\mu - 1$ ». Allontanandoci dalla via seguita dall'Autore faremo dipendere la dimostrazione di questo teorema da alcune note proprietà delle forme quadratiche.

Osserviamo dapprima che, indicando con A_r il determinante

$$\sum(\pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{r,r}),$$

la condizione alla quale deve soddisfare la forma u equivale al dover essere i termini della serie

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad \ldots \quad A_n$$

tutti positivi (o negativi). Infatti è noto che la forma u equivale alla

$$A_1 z_1^2 + \frac{A_2}{A_1} z_2^2 + \ldots + \frac{A_n}{A_{n-1}} z_n^2,$$

nella quale $z_1, z_2, \ldots z_n$ sono forme lineari delle $x_1, x_2, \ldots x_n$; ne risulta che, se le quantità $A_1, A_2, \ldots$ sono tutte positive (o negative), la forma u non potrà annullarsi che annullandosi tutte le $z_1, z_2, \ldots z_n$, e quindi tutte le $x_1, x_2, \ldots x_n$. Ciò posto il teorema del sig. Weierstrass può dedursi come corollario del seguente, dovuto a Sylvester *):

Si indichi con B_r il determinante

$$\sum(\pm \beta_{1,1} \beta_{2,2} \ldots \beta_{r,r}),$$

e suppongasi che i coefficienti delle più alte potenze della θ nelle equazioni

$$B_1(\theta) = 0, \quad B_2(\theta) = 0, \quad \ldots \quad B_r(\theta) = 0, \quad \ldots \quad B_n(\theta) = B(\theta) = 0,$$

cioè i determinanti $A_1, A_2, \ldots A_n$ sieno tutti positivi (o negativi). *Le radici della equazione $B_r = 0$ sono tutte reali, e comprese rispettivamente: fra $+\infty$, le successive radici (discendenti in ordine di grandezza) dell'equazione $B_{r-1}(\theta) = 0$, e $-\infty$.*

Ne segue che, se la equazione $B_n = B(\theta) = 0$ ha μ radici eguali a θ_m, la equazione $B_{n-1} = \beta_{n,n}(\theta) = 0$ ed evidentemente in generale la $\beta_{r,r}(\theta) = 0$ avrà $\mu - 1$ radici eguali a θ_m; e la equazione $B_{n-2}(\theta) = 0$, o più generalmente la $\frac{\partial^2 B}{\partial b_{r,r} \partial b_{s,s}} = 0$, avrà $\mu - 2$ radici eguali a θ_m; per cui in causa della (5) il polinomio $\beta_{r,s}(\theta)$ conterrà il fattore $(\theta - \theta_m)^{\mu-1}$, cioè la equazione $\beta_{r,s}(\theta) = 0$ ammetterà la radice θ_m multipla secondo il numero $\mu - 1$.

Supponiamo:

$$B(\theta) = A(\theta - \theta_1)^{\mu_1} (\theta - \theta_2)^{\mu_2} \ldots (\theta - \theta_i)^{\mu_i},$$

$$\varphi(\theta) = A(\theta - \theta_1)(\theta - \theta_2) \ldots (\theta - \theta_i);$$

---

*) [illegible] *Theory of the Secular-inequality Determinantive Equation generalized* [Philosophical Magazine, t. II (1852), p. 138].

sarà:

$$H_{\mu+1}(\theta) = \frac{Q(\theta)}{P(\theta)} \psi^{\mu+1}(\theta)(\theta - \theta_m),$$

per la quale:

$$H_{\mu+1}(\theta_m) = 0.$$

Analogamente si dimostrerebbero nulli tutti i determinanti degli ordini accennati. Ora, se trasformiamo la forma quadratica p_m mediante una sostituzione lineare qualunque

$$u_r = k_{r,1} z_1 + k_{r,2} z_2 + \dots + k_{r,n} z_n$$

in un'altra:

$$\sum_1^n q_r z_r^2,$$

la quale contenga i soli quadrati delle nuove variabili, si avranno le

$$(9) \qquad \begin{cases} l_{1,r} k_{1,s} + l_{2,r} k_{2,s} + \dots + l_{n,r} k_{n,s} = 0, \\ l_{1,r} k_{1,r} + l_{2,r} k_{2,r} + \dots + l_{n,r} k_{n,r} = q_r, \end{cases}$$

essendosi posto

$$l_{r,s} = \sum_1^n k_{\varepsilon,r} \frac{h_{\varepsilon,s}(\theta_m)}{\varphi'(\theta_m)}.$$

Il determinante

$$\sum (\pm\, l_{1,1}\, l_{2,2} \dots l_{n,n})$$

ed i determinanti minori del medesimo degli ordini primo, secondo, ... $(n - \mu - 1)^{\text{esimo}}$ saranno quindi nulli, e per le (9) dovranno essere nulle tutte le combinazioni a $\mu + 1$ a $\mu + 1$, a $\mu + 2$ a $\mu + 2$, ... ad n ad n delle quantità $q_1, q_2, \dots q_n$; cioè dovranno essere

$$q_{\mu+1} = q_{\mu+2} = \dots = q_n = 0,$$

ed in conseguenza

$$p_m = q_1 z_1^2 + q_2 z_2^2 + \dots + q_\mu z_\mu^2.$$

Le trasformate delle forme quadratiche u, v saranno perciò composte anche in questo secondo caso di somme di n quadrati di funzioni lineari delle indeterminate $x_1, x_2, \dots x_n$.

Giugno 1858.

[G.].

LII.

SULLA RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DEL QUINTO GRADO. *)

Annali di Matematica pura ed applicata, serie I, tomo I [illegible]

1. In una Nota « *Sulle equazioni del moltiplicatore* », ecc. [XLIX, pp. 321-324] abbiamo dimostrato che le radici quadrate delle radici della equazione del moltiplicatore corrispondente ad una trasformazione d'ordine n primo, si ponno esprimere linearmente per $\frac{n+1}{2}$ quantità $A_0, A_1, \dots A_{\frac{n-1}{2}}$. Considerando per ora in particolare l'equazione del sesto grado

$$(1) \qquad z^6 + a_1 z^5 + a_2 z^4 + \dots + a_5 z + a_6 = 0$$

corrispondente alla trasformazione di quinto ordine, ed indicando con $z_1, z_2, \dots z_6$ le radici della medesima, si avranno le

$$(2) \quad \begin{cases} \sqrt{z_1} = A_0\sqrt{5}, & \sqrt{z_2} = A_0 + A_1 + A_2, & \sqrt{z_3} = A_0 + \alpha A_1 + \alpha^4 A_2, \\ \sqrt{z_4} = A_0 + \alpha^2 A_1 + \alpha^3 A_2, & \sqrt{z_5} = A_0 + \alpha^3 A_1 + \alpha^2 A_2, & \sqrt{z_6} = A_0 + \alpha^4 A_1 + \alpha A_2, \end{cases}$$

nelle quali α è una radice immaginaria dell'equazione $\alpha^5 - 1 = 0$, e le A_0, A_1, A_2 hanno i valori trovati nella Nota citata.

Se mediante queste espressioni delle radici si formano i coefficienti della (1), si

---

*) Rivista bibliografica: HERMITE. *Sur la résolution de l'équation du cinquième degré* [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XLVI (1858), p. 508].

ottengono facilmente le relazioni:

$$(3)\quad \begin{cases} a_1 = -10A, & a_2 = 35A^2, \quad a_3 = -60A^3 + 10B, \\ a_4 = 55A^4 - 30AB, & a_5 = -26A^5 + 30A^2B - C, \quad a_6 = 5(A^3 - B)^2, \end{cases}$$

essendosi posto per brevità:

$$(4)\quad \begin{cases} A = A_0^2 + A_1A_2, \quad B = 8A_0^4A_1A_2 - 2A_0^2A_1^2A_2^2 + A_1^3A_2^3 - A_0(A_1^5 + A_2^5) \\ C = 320A_0^6A_1^2A_2^2 - 160A_0^4A_1^3A_2^3 + 20A_0^2A_1^4A_2^4 + 6A_1^5A_2^5 \\ \qquad - 4A_0(32A_0^4 - 20A_0^2A_1A_2 + 5A_1^2A_2^2)(A_1^5 + A_2^5) + A_1^{10} + A_2^{10}. \end{cases}$$

Ma è noto che per $n = 5$ l'equazione del moltiplicatore è la

$$z^6 - 10z^5 + 35z^4 - 60z^3 + 55z^2 - 2(13 - 2^7k^2k'^2)z + 5 = 0;$$

quindi la prima, terza e quinta delle equazioni (3) daranno:

$$(5)\qquad A = 1, \qquad B = 0, \qquad C = -2^8k^2k'^2,$$

e le altre sono soddisfatte da questi valori. Dalle precedenti relazioni deduconsi quelle che abbiamo date nella Nota citata.

2. Poniamo ora:

$$(6)\quad \begin{cases} x_1 = (z_2 - z_1)(z_0 - z_3)(z_4 - z_5), \quad x_2 = (z_3 - z_1)(z_4 - z_2)(z_5 - z_0), \\ x_3 = (z_4 - z_1)(z_5 - z_3)(z_0 - z_2), \quad x_4 = (z_5 - z_1)(z_0 - z_4)(z_2 - z_3), \\ \qquad\qquad x_5 = (z_0 - z_1)(z_2 - z_5)(z_3 - z_4); \end{cases}$$

ed esprimiamo mediante le (2) i secondi membri di queste equazioni in funzioni di A_0, A_1, A_2. Si hanno facilmente le

$$(7)\quad \begin{cases} x_1 = \sqrt{5}(B_0 + B_1 + B_2 + B_3 + B_4), \quad x_2 = \sqrt{5}(B_0 + \alpha B_1 + \alpha^2B_2 + \alpha^3B_3 + \alpha^4B_4), \\ x_3 = \sqrt{5}(B_0 + \alpha^2B_1 + \alpha^4B_2 + \alpha B_3 + \alpha^3B_4), \quad x_4 = \sqrt{5}(B_0 + \alpha^3B_1 + \alpha B_2 + \alpha^4B_3 + \alpha^2B_4), \\ \qquad\qquad x_5 = \sqrt{5}(B_0 + \alpha^4B_1 + \alpha^3B_2 + \alpha^2B_3 + \alpha B_4), \end{cases}$$

nelle quali $B_0 = 4B$ e:

$$B_1 = 8A_0A_1^3A_2^2 - 16A_0^3A_1^2A_2 - 2A_1A_2^5 - A_1^6 + 4A_0^2A_2^4,$$

$$B_4 = 8A_0A_1^2A_2^3 - 16A_0^3A_1A_2^2 - 2A_1^5A_2 - A_2^6 + 4A_0^2A_1^4,$$

$$B_2 = 16A_0^3A_2^3 - 16A_0^4A_1^2 + A_1^4A_2^2 - 4A_0A_1A_2^4,$$

$$B_3 = 16A_0^3A_1^3 - 16A_0^4A_2^2 + A_1^2A_2^4 - 4A_0A_1^4A_2.$$

Le radici x_1, x_2, ... della equazione superiore ponno esprimersi in causa dei valori delle z_1, z_2, ... trovati nella Nota citata nel modo seguente. Attribuendo a K ed a K' l'ordinaria significazione, facciasi $\omega = i\frac{K'}{K}$ ed

$$f(\omega) = \left(\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\, e^{i\pi m^2 \omega}\right)^2;$$

si avranno [XLIX, pp. 321-324]:

$$z_1 = \frac{5}{f(\omega)} f(5\omega), \qquad z_2 = \frac{1}{f(\omega)} f\left(\frac{\omega}{5}\right), \qquad z_3 = \frac{1}{f(\omega)} f\left(\frac{\omega+2}{5}\right),$$

$$z_4 = \frac{1}{f(\omega)} f\left(\frac{\omega+4}{5}\right), \qquad z_5 = \frac{1}{f(\omega)} f\left(\frac{\omega+6}{5}\right), \qquad z_6 = \frac{1}{f(\omega)} f\left(\frac{\omega+8}{5}\right);$$

per cui, ponendo

$$F(\omega) = \left[f\left(\frac{\omega}{5}\right) - 5f(5\omega)\right]\left[f\left(\frac{\omega+2}{5}\right) - f\left(\frac{\omega+8}{5}\right)\right]\left[f\left(\frac{\omega+4}{5}\right) - f\left(\frac{\omega+6}{5}\right)\right],$$

risulteranno:

$$x_1 = \frac{1}{f^3(\omega)} F(\omega), \quad x_2 = \frac{1}{f^3(\omega)} F(\omega+2), \quad \ldots, \quad x_5 = \frac{1}{f^3(\omega)} F(\omega+8).$$

Da queste si deducono analoghe espressioni per le radici θ_1, θ_2, ... della (8).

3. La ottenuta risoluzione dell'equazione (8) conduce a quella di una equazione qualunque del quinto grado. Infatti è noto *) avere il sig. JERRARD dimostrato essere possibile di ridurre una equazione del quinto grado alla forma:

$$(9) \qquad \theta^5 - \frac{5}{2}\theta^4 - a = 0;$$

se quindi il modulo k, corrispondente alle funzioni K, K', si determina in modo che risulti

$$(10) \qquad (1 - 4k^2k'^2)^2 = 2ak^2k'^2,$$

la (9) viene a coincidere colla (8). Dunque, assumendo pel valore di k una qualsivoglia delle radici dell'equazione (10) e sostituendo il medesimo ed il valore corrispondente

*) JERRARD, *Mathematical Researches* (Bristol and London, 1834). — HAMILTON, Reports of the British Association, t. VI (1836). — SERRET, *Cours d'Algèbre supérieure*, Note V.

di ω nelle espressioni:

$$\theta_r = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{5^{\frac{3}{4}}.\,2^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{2}}k'^2}\cdot\frac{F^2[\omega + 2(r-1)]}{f'(\omega)}, \qquad (r = 1, 2, \ldots 5).$$

si otterranno le radici dell'equazione (9), alla quale può ridursi ogni equazione del quinto grado.

Giugno 1858.

APPENDICE.

La equazione

$$x(x^2 + 5^2.\,2^8 k^2 k'^2)^2 = 5^2\sqrt{5}.\,2^{22}k^4k'^4(1 - 4k^2k'^2),$$

che ha per radici le espressioni (6) o (7), trasformasi per mezzo della sostituzione

$$\sqrt{x} = 4y\sqrt[4]{5}$$

nella

$$(1) \qquad y^5 + 5k^2k'^2y - 2k^2k'^2(1 - 2k^2) = 0.$$

Questa trasformazione, comunicatami dal sig. HERMITE, induce a credere che, non solo le x_1, x_2, ..., ma anche le $\sqrt{x_1}$, $\sqrt{x_2}$, ... sono funzioni determinate di q. I valori delle quantità B_0, B_1, ... trovati nell'articolo sucitato dimostrano la sussistenza di questa proprietà. Infatti le quantità B_0, B_1, B_2, ... si possono esprimere in funzione delle quattro:

$$C_0 = -A_1(4A_0^2 - A_1A_2), \qquad C_3 = A_2(4A_0^2 - A_1A_2),$$

$$C_1 = 2A_0A_1^2 - A_2^3 \qquad C_2 = -(2A_0A_2^2 - A_1^3),$$

nel seguente modo:

$$B_0 = -2(C_0C_3 + C_1C_2), \quad B_1 = -(C_2^2 + 2C_1C_3), \quad B_2 = -(C_0^2 + 2C_2C_3)$$

$$B_3 = -(C_3^2 + 2C_0C_1), \qquad B_4 = -(C_1^2 + 2C_0C_2).$$

Ora, sostituendo queste espressioni nelle equazioni (7) si ottengono evidentemente le

$$x_1 = -\sqrt{5}\,(C_0 + C_1 + C_2 + C_3)^2, \quad x_2 = -\sqrt{5}\,(\alpha\, C_0 + \alpha^2 C_1 + \alpha^3 C_2 + \alpha^4 C_3)^2, \quad \text{ecc.},$$

dalle quali deduconsi i valori di $\sqrt{x_1}$, $\sqrt{x_2}$, ...

Questi valori dànno per le radici dell'equazione (1) le espressioni:

$$y_1 = \frac{i}{4}(C_0 + C_1 + C_2 + C_3), \qquad y_2 = \frac{i}{4}(\alpha\, C_0 + \alpha^2 C_1 + \alpha^3 C_2 + \alpha^4 C_3),$$

$$y_3 = \frac{i}{4}(\alpha^2 C_0 + \alpha^4 C_1 + \alpha\, C_2 + \alpha^3 C_3), \quad y_4 = \frac{i}{4}(\alpha^3 C_0 + \alpha\, C_1 + \alpha^4 C_2 + \alpha^2 C_3),$$

$$y_5 = \frac{i}{4}(\alpha^4 C_0 + \alpha^3 C_1 + \alpha^2 C_2 + \alpha\, C_3).$$

Si può giungere anche direttamente a questo risultato osservando che, se rappresentasi con

$$y^5 + q_1 y^4 + \ldots + q_5 = 0$$

la equazione di cui le radici sono y_1, y_2, ... y_5, e si pone per brevità:

$$Q_2 = C_0 C_3 + C_1 C_2, \qquad Q_3 = C_0^2 C_2 + C_1^2 C_0 + C_2^2 C_3 + C_3^2 C_1,$$

$$Q_4 = C_0^3 C_1 + C_1^3 C_3 + C_2^3 C_0 + C_3^3 C_2 + 3\, C_0 C_1 C_2 C_3,$$

pei valori superiori di y_1, y_2, ... si hanno le

$$q_1 = 0, \qquad q_2 = \frac{5}{16}\, Q_2, \qquad q_3 = \frac{5\,i}{4^3}\, Q_3, \qquad q_4 = -\frac{5}{4^4}\,(Q_4 - Q_2^2).$$

Ora pei valori di C_0, C_1, ... risultano:

$$Q_2 = -2B, \qquad Q_4 = AC - 5B^2$$

e Q_3 identicamente eguale a zero; quindi pei valori (5) delle A, B, C si hanno le

$$q_2 = 0, \qquad q_3 = 0, \qquad q_4 = 5\, k^2 k'^2.$$

Da ultimo pel valore di $\Pi^2(z_1, z_2, \ldots z_5)$ trovato nell'articolo suddetto si avrà:

$$q_5 = -2\, k^2 k'^2 (1 - 2 k^2),$$

per cui l'equazione di cui le radici sono le y_1, y_2, ... sarà la (1).

È assai rimarchevole la relazione che ha luogo fra le equazioni (1) e quella data dal sig. Hermite nel suo lavoro « *Sur la résolution de l'équation du cinquième degré* »

LIII.

SULLE FUNZIONI BERNOULLIANE ED EULERIANE *).

Annali di Matematica pura ed applicata, [illegible]

È noto che i coefficienti A_1, A_3, ... della prima delle due serie trigonometriche:

$$\tang x = \frac{A_1 x}{\Pi 1} + \frac{A_3 x^3}{\Pi 3} + \frac{A_5 x^5}{\Pi 5} + \dots \qquad \left(\frac{\pi}{2} > x > -\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sec x = 1 + \frac{A_2 x^2}{\Pi 2} + \frac{A_4 x^4}{\Pi 4} + \dots \qquad (\Pi r = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r)$$

hanno coi numeri Bernoulliani B_1, B_2, ... la relazione:

$$B_r = \frac{2r}{2^{2r}(2^{2r}-1)} A_{2r-1}.$$

Il prof. RAABE **) ha denominato *Euleriani* ed indicato con E_1, E_2, ... i numeri che hanno coi coefficienti A_2, A_4, ... della seconda serie la relazione:

$$E_r = A_{2r}.$$

I coefficienti A ad indice dispari, e quindi i numeri Bernoulliani, possono esprimersi

---

*) Rivista bibliografica: RAABE, Mathematische Mittheilungen, Zürich, fasc. I (1857), p. 31; fasc. II (1858), p. 117.

**) *Zurückführung einiger Summen und bestimmten Integrale auf die Jacob-*BERNOULLI'*sche Function* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. XLII (1851), pp. 348-367 (p. 366)].

in funzione dei coefficienti A ad indice pari, cioè dei numeri Euleriani, osservando che dal confronto dei coefficienti delle stesse potenze di x nelle identità *)

$$\operatorname{tang} x = \cos x \frac{d \sec x}{d x}, \qquad \operatorname{tang} x = \operatorname{sen} x \sec x$$

si hanno le

$$A_{2r-1} = A_{2r} - \binom{2r-1}{2r-3} A_{2r-2} + \binom{2r-1}{2r-5} A_{2r-4} - \dots + (-1)^{r-1} \binom{2r-1}{1} A_2,$$

$$A_{2r-1} = \binom{2r-1}{2r-2} A_{2r-2} - \binom{2r-1}{2r-4} A_{2r-4} + \dots + (-1)^{r} \binom{2r-1}{2} A_2 + (-1)^{r-1},$$

essendo

$$\binom{s}{r} = \frac{\Pi s}{\Pi r \,.\, \Pi (s-r)};$$

e queste sottratte, la seconda dalla prima, dànno fra i numeri Euleriani la relazione:

$$E_r - \binom{2r}{2} E_{r-1} + \binom{2r}{4} E_{r-2} - \dots + (-1)^{r-1} \binom{2r}{2r-2} E_1 + (-1)^r = 0;$$

alla quale, ponendo

$$e_s = (-1)^s \frac{E_s}{\Pi 2s},$$

può darsi la forma:

$$(1) \qquad e_r + \frac{e_{r-1}}{\Pi 2} + \frac{e_{r-2}}{\Pi 4} + \dots + \frac{e_1}{\Pi (2r-2)} + \frac{1}{\Pi 2r} = 0.$$

Pei numeri Bernoulliani, ponendo

$$b_s = (-1)^s \frac{2(2^{2s}-1)}{\Pi 2s} B_s,$$

si ha la analoga relazione **):

$$2 b_r + \frac{b_{r-1}}{\Pi 2} + \frac{b_{r-2}}{\Pi 4} + \dots + \frac{b_1}{\Pi (2r-2)} + \frac{1}{\Pi (2r-1)} = 0.$$

*) SCHLÖMILCH, *Développement d'une formule qui donne en même temps les nombres de* BERNOULLI *et les coefficients de la série qui exprime la sécante* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. XXXII (1846), pp. 360-364].

**) DIENGER, *Die* LAGRANGE'*sche Formel und die Reihensummirung durch dieselbe* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. XXXIV (1847), pp. 75-100 (p. 91)]. — MALMSTÉN, *Sur la formule* $h u'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2} \Delta u'_x + \frac{B_1 h^2}{1.2} \Delta u''_x - \frac{B_2 h^4}{1.2.3.4} \Delta u^{IV}_x + \dots$ [Ibid., t. XXXV (1847), pp. 55-82 (p. 60)]. — BELLAVITIS, *Sulle serie di numeri che comprendono i Bernoulliani* [Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, t. IV (1853), pp. 108-127 (p. 121)].

Se indichiamo con Δ_r il determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r-1} & a_{r-2} & a_{r-3} & \dots & a_1 & 1 \\ a_r & a_{r-1} & a_{r-2} & \dots & a_2 & a_1 \end{vmatrix},$$

supponendo per brevità di scrittura $a_s = \frac{1}{\Pi 2 s}$, dalla formola (1) deducesi:

$$e_r = (-1)^r \Delta_r$$

e quindi

$$E_r = \Pi 2 r . \Delta_r .$$

Questa forma di determinante conduce anche alla seguente rappresentazione dei numeri Euleriani:

$$E_r = \Pi 2 r \sum (-1)^{m} \frac{\Pi m}{\Pi q_1 . \Pi q_2 \dots \Pi q_r} a_1^{q_1} a_2^{q_2} \dots a_r^{q_r},$$

il segno sommatorio dovendosi estendere a tutte le soluzioni intere positive o nulle della equazione:

$$q_1 + 2 q_2 + 3 q_3 + \dots + r q_r = r$$

ed $m = q_1 + q_2 + \dots + q_r$. Una espressione di questa specie pei numeri Bernoulliani è dovuta al sig. FERGOLA *).

2. Se si moltiplicano fra loro membro per membro le equazioni:

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + B_1 \frac{x^2}{\Pi 2} - B_2 \frac{x^4}{\Pi 4} + \dots \quad (2\pi > x > -2\pi)$$

$$\frac{e^{mx} - 1}{x} = m + \frac{m^2}{\Pi 2} x + \frac{m^3}{\Pi 3} x^2 + \dots ,$$

ottengonsi per i coefficienti di x^{2r} ed x^{2r+1} nel secondo membro dell'equazione risul-

---

*) *Sopra lo sviluppo della funzione* $\frac{1}{e^x - 1}$ [illegible] BERNOULLI [Memorie della R. Accademia delle Scienze di Napoli, t. II (1857), p. 315] — Intorno lo sviluppo di questa funzione si occuparono l'EULERO nel Cap. VII delle « *Institutiones Calculi differentialis* » ed il prof. GENOCCHI nella Nota: « *Intorno all'espressione generale de' numeri Bernoulliani* » [Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, t. III (1852), p. 395].

tante le espressioni:

$$\frac{1}{\Pi 2r}\left[\frac{m^{2r+1}}{2r+1} - \frac{1}{2}m^{2r} + \frac{1}{2}\binom{2r}{1}B_1 m^{2r-1} - \frac{1}{4}\binom{2r}{3}B_2 m^{2r-3} + \dots \right.$$
$$\left. + \frac{(-1)^{r-1}}{2r}\binom{2r}{2r-1}B_r m\right],$$

$$\frac{1}{\Pi(2r+1)}\left[\frac{m^{2r+2}}{2(r+1)} - \frac{1}{2}m^{2r+1} + \frac{1}{2}\binom{2r+1}{1}B_1 m^{2r} - \frac{1}{4}\binom{2r+1}{3}B_2 m^{2r-2} + \dots \right.$$
$$\left. + \frac{(-1)^{r-1}}{2r}\binom{2r+1}{2r-1}B_r m^2\right];$$

ma, il prodotto dei primi membri essendo eguale ad

$$1 + e^x + e^{2x} + \dots + e^{(m-1)x},$$

ed i coefficienti di x^{2r} ed x^{2r+1} nello sviluppo di questa espressione essendo ordinatamente:

$$\frac{1}{\Pi 2r}[1 + 2^{2r} + 3^{2r} + \dots + (m-1)^{2r}],$$

$$\frac{1}{\Pi(2r+1)}[1 + 2^{2r+1} + 3^{2r+1} + \dots + (m-1)^{2r+1}],$$

ne risulta che, ponendo

$$B''(x) = 1 + 2^{2r} + 3^{2r} + \dots + (x-1)^{2r},$$

$$B'(x) = 1 + 2^{2r+1} + 3^{2r+1} + \dots + (x-1)^{2r+1},$$

si hanno le

$$B''(x) = \frac{x^{2r+1}}{2r+1} - \frac{1}{2}x^{2r} + \frac{1}{2}\binom{2r}{1}B_1 x^{2r-1} - \dots + \frac{(-1)^{r-1}}{2r}\binom{2r}{2r-1}B_r x,$$

$$B'(x) = \frac{x^{2r+2}}{2(r+1)} - \frac{1}{2}x^{2r+1} + \frac{1}{2}\binom{2r+1}{1}B_1 x^{2r} - \dots + \frac{(-1)^{r-1}}{2r}\binom{2r+1}{2r-1}B_r x^2.$$

Le funzioni $B''(x)$, $B'(x)$ sono quelle denominate dal sig. RAABE *funzioni Bernoulliane*.

Analogamente, considerando gli sviluppi delle funzioni:

$$\frac{e^{\frac{1}{2}x}}{1+e^x}, \qquad e^{-\frac{1}{2}x} - e^{\left(2m-\frac{1}{2}\right)x},$$

il prodotto delle quali è eguale ad

$$1 - e^x + e^{2x} - \dots - e^{(2m-1)x},$$

dimostrasi che, per le espressioni

$$E''(x) = 1 - 2^{2r} + 3^{2r} - \ldots + (2x-1)^{2r},$$

$$E'(x) = 1 - 2^{2r+1} + 3^{2r+1} - \ldots + (2x-1)^{2r+1},$$

denominate dal sig. RAABE *funzioni Euleriane*, sussistono le equazioni:

$$2^{2r-1}E''(x) = (4x-1)^{2r} - \binom{2r}{2}E_1(4x-1)^{2r-2} + \binom{2r}{4}E_2(4x-1)^{2r-4} - \ldots + (-1)^r E_r,$$

$$2^{2r-2}E'(x) = (4x-1)^{2r+1} - \binom{2r+1}{2}E_1(4x-1)^{2r-1} + \ldots$$

$$+ (-1)^r\binom{2r+1}{2r}E_r(4x-1) + (-1)^{r+1}\frac{2^{2r+2}(2^{2r+2}-1)}{2(r+1)}B_{2r+1}.$$

Il prof. RAABE, nella Memoria del t. XLII del « Journal für die reine und angewandte Mathematik » ed in quelle recenti delle « Mathematische Mittheilungen » di Zurigo, ha trovato molte interessanti proprietà di queste funzioni. Notiamo fra esse le seguenti:

$$E''(x) = 2^{2r}\left|B''(x+\tfrac{1}{2}) - B''(x)\right|, \qquad E'(x) = B'(2x) - 2^{2r+1}B'(x),$$

le quali legano fra loro le due specie di funzioni; e le quattro altre:

$$B''(x) = (-1)^{r+1}\frac{2\,\Pi(2r)}{(2\pi)^{2r}}\sum\frac{\operatorname{sen} 2i\pi x}{i^{2r}},$$

$$E''(x) = (-1)^r\frac{2\,\Pi(2r)}{\pi^{2r}}\sum\frac{\operatorname{sen} 2(2i-1)\pi x}{(2i-1)^{2r}},$$

$$B'(x) = (-1)^r\frac{2\,\Pi(2r+1)}{(2\pi)^{2r+1}}\sum\frac{\cos 2i\pi x}{i^{2r+1}} + (-1)^{r+1}\frac{B_{r+1}}{2r+2},$$

$$E'(x) = (-1)^r\frac{2\,\Pi(2r+1)}{\pi^{2r+1}}\sum\frac{\cos 2(2i-1)\pi x}{(2i-1)^{2r+1}} + (-1)^{r+1}\frac{2^{2r+2}-1}{2r+2}B_{r+1};$$

dalle quali, per formole note, si passa alla rappresentazione di quelle funzioni col mezzo d'integrali definiti.

Luglio 1858.

[Tn.].

LIV.

LA TEORICA DEI COVARIANTI E DEGLI INVARIANTI DELLE FORME BINARIE E LE SUE PRINCIPALI APPLICAZIONI.

(Monografia).

Annali di Matematica pura ed applicata,
tomo I (1858), pp. [illegible]; tomo II [illegible]; tomo III [illegible];
tomo IV [illegible] *).

CAP. I. — Definizioni.

1. Una funzione omogenea di due indeterminate

$$u = a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{2} a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + n a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n$$

denominasi *forma binaria* dell'ennesimo grado, ed indicasi per brevità col simbolo:

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)(x, y)^n.$$

Supponga si che, operando su di essa la *sostituzione lineare*

$$(1) \qquad x = \alpha\xi + \beta\eta, \qquad y = \gamma\xi + \delta\eta,$$

si ottenga la *trasformata*:

$$(2) \quad (a_0, a_1, \ldots a_n)(\alpha\xi + \beta\eta, \gamma\xi + \delta\eta)^n = (A_0, A_1, \ldots A_n)(\xi, \eta)^n = U;$$

ogni funzione $\varphi(a_0, a_1, \ldots a_n, x, y)$ omogenea sia rispetto alle $a_0, a_1, \ldots a_n$ come

---

*) [Nel tomo I sono contenuti i Capitoli I, II e III; nel tomo II i Capitoli IV e V; nel tomo III il Capitolo VI; nel tomo IV il Capitolo VII].

alle x, y, la quale soddisfa alla condizione

$$(3)\quad (\alpha\delta - \beta\gamma)^{\mu}\,\varphi(a_0, a_1, \ldots a_n, \alpha\xi + \beta\eta, \gamma\xi + \delta\eta) = \varphi(A_0, A_1, \ldots A_n, \xi, \eta),$$

si denomina *covariante* della forma binaria u; ed ogni funzione $\psi(a_0, a_1, \ldots a_n)$ omogenea rispetto alle $a_0, a_1, \ldots a_n$, per la quale sia soddisfatta la condizione

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)^{\nu}\,\psi(a_0, a_1, \ldots a_n) = \psi(A_0, A_1, \ldots A_n)$$

dicesi *invariante* della forma u. I numeri μ, ν sono evidentemente interi e positivi, ed il determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ chiamasi il *modulo* della sostituzione.

Esempio. — La forma binaria del terzo grado (forma cubica):

$$(a_0, a_1, a_2, a_3)(x, y)^3$$

trasformasi per la sostituzione lineare (1) nella

$$(A_0, A_1, A_2, A_3)(\xi, \eta)^3,$$

essendo

$$A_0 = (a_0, a_1, a_2, a_3)(\alpha, \gamma)^3, \qquad A_3 = (a_0, a_1, a_2, a_3)(\beta, \delta)^3,$$

$$3A_1 = \beta\frac{\partial A_0}{\partial\alpha} + \delta\frac{\partial A_0}{\partial\gamma}, \qquad 3A_2 = \alpha\frac{\partial A_3}{\partial\beta} + \gamma\frac{\partial A_3}{\partial\delta}.$$

Sieno:

$$\varphi(a_0, a_1, a_2, a_3, x, y) = (a_0a_2 - a_1^2, \tfrac{1}{2}(a_0a_3 - a_1a_2), a_1a_3 - a_2^2)(x, y)^2,$$

$$\psi(a_0, a_1, a_2, a_3) = a_0^2a_3^2 - 6a_0a_1a_2a_3 - 3a_1^2a_2^2 + 4a_0a_2^3 + 4a_1^3a_3;$$

si verificherà facilmente essere identica ciascuna delle equazioni:

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)^2\,\varphi(a_0, a_1, a_2, a_3, \alpha\xi + \beta\eta, \gamma\xi + \delta\eta) = \varphi(A_0, A_1, A_2, A_3, \xi, \eta),$$

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)^6\,\psi(a_0, a_1, a_2, a_3) = \psi(A_0, A_1, A_2, A_3).$$

Osserviamo che, supponendo il covariante $\varphi(a_0, a_1, \ldots a_n, x, y)$ di grado m rispetto alle indeterminate, e di grado p rispetto ai coefficienti $a_0, a_1, \ldots$, il primo membro dell'equazione (3) sarà del grado $2\mu + m$, ed il secondo membro del grado np rispetto alle α, β, γ, δ, essendo tutti i coefficienti $A_0, A_1, \ldots$ del grado n relativamente a queste quantità. Si avrà quindi:

$$2\mu + m = np \qquad \text{e} \qquad \mu = \tfrac{1}{2}(np - m).$$

Analogamente, supposto l'invariante $\psi(a_0, a_1, \ldots a_n)$ di grado q rispetto ai coefficienti $a_0, a_1, \ldots$, si troverà $\nu = \frac{1}{2}nq$. Il numero m, cioè il grado di φ rispetto alle variabili, si dirà *ordine* del covariante stesso, ed i numeri μ, ν si denomineranno *indici* del cova-

riante e dell'invariante. *La [illegible] dell'ordine n e dell'indice zero.*

Una funzione $f(a_0, a_1, \ldots a_n, X, Y)$ omogenea rispetto alle $a_0, a_1, \ldots a_n, X, Y$, la quale soddisfi alla equazione:

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)^{\mu} f(a_0, a_1, \ldots a_n, \delta\xi - \gamma\eta, \alpha\eta - \beta\xi) = f(A_0, A_1, \ldots A_n, \xi, \eta)$$

denominasi *controvariante* della forma u. Si osservi che, sostituendo in questa equazione η e $-\xi$ in luogo di ξ, η, si ottiene per le (1):

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)^{\mu} f(a_0, a_1, \ldots a_n, y, -x) = f(A_0, A_1, \ldots A_n, \eta, -\xi),$$

quindi [equazione (3)] i controvarianti delle forme binarie deduconsi dai covarianti delle medesime sostituendo in questi $y, -x$ in luogo delle x, y.

2. Consideriamo il determinante

$$\Delta_m = \sum\left(\pm \frac{\partial^m u}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial^m u}{\partial x^{m-1}\partial y} \cdots \frac{\partial^m u}{\partial y^m}\right)$$

ed osserviamo che trasformando la u mediante la sostituzione lineare (1), supposto $r + s = m$, si ha:

$$\frac{\partial^m u}{\partial \xi^r \partial \eta^s} = l_{r,s} \frac{\partial^m u}{\partial x^m} + l'_{r,s} \frac{\partial^m u}{\partial x^{m-1}\partial y} + \cdots + l^{(m)}_{r,s} \frac{\partial^m u}{\partial y^m}, \tag{4}$$

essendo $l_{r,s}, l'_{r,s}, \ldots$ funzioni dei coefficienti della sostituzione $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Se quindi indichiamo con L il determinante

$$\begin{vmatrix} l_{m,0} & l'_{m,0} & \ldots & l^{(m)}_{m,0} \\ l_{m-1,1} & l'_{m-1,1} & \ldots & l^{(m)}_{m-1,1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_{0,m} & l'_{0,m} & \ldots & l^{(m)}_{0,m} \end{vmatrix},$$

e con H il determinante

$$\sum\left(\pm \frac{\partial^{2m} u}{\partial \xi^m \partial x^m} \cdot \frac{\partial^{2m} u}{\partial \xi^{m-1}\partial \eta \partial x^{m-1}\partial y} \cdots \frac{\partial^{2m} u}{\partial \eta^m \partial y^m}\right),$$

si avrà per le (4):

$$L \Delta_m = H,$$

ed indicando con ∇_m il determinante

$$\sum\left(\pm \frac{\partial^{2m} U}{\partial \xi^{2m}} \cdot \frac{\partial^{2m} U}{\partial \xi^{2m-2}\partial \eta^2} \cdots \frac{\partial^{2m} U}{\partial \eta^{2m}}\right)$$

si avrà analogamente:

$$L H = \nabla_m ,$$

per cui:

(5) $$L^2 \Delta_m = \nabla_m .$$

Ora si hanno facilmente le

$$l_{r,s} = \alpha^r \beta^s ,$$

$$l'_{r,s} = r \alpha^{r-1} \gamma \beta^s + s \alpha^r \delta \beta^{s-1} ,$$

$$l''_{r,s} = \frac{r(r-1)}{2} \alpha^{r-2} \gamma^2 \beta^s + r s \alpha^{r-1} \gamma \delta \beta^{s-1} + \frac{s(s-1)}{2} \alpha^r \beta^{s-2} \delta^2 ,$$

. . . .

$$l^{(m-2)}_{r,s} = \frac{r(r-1)}{2} \gamma^{r-2} \alpha^2 \delta^s + r s \gamma^{r-1} \alpha \beta \delta^{s-1} + \frac{s(s-1)}{2} \gamma^r \delta^{s-2} \beta^2 ,$$

$$l^{(m-1)}_{r,s} = r \gamma^{r-1} \alpha \delta^s + s \gamma^r \beta \delta^{s-1} ,$$

$$l^{(m)}_{r,s} = \gamma^r \delta^s ;$$

quindi, ponendo per brevità

$$\frac{\gamma}{\alpha} = a , \qquad \frac{\delta}{\beta} = b , \qquad \frac{l^{(k)}_{r,s}}{\alpha^r \beta^s} = a^{(k)}_{r,s} ,$$

dividendo nel determinante L gli elementi della prima linea per α^m, quelli della seconda per $\alpha^{m-1}\beta$, ... quelli dell'ultima per β^m, si avrà:

$$L = \alpha^{\frac{m(m+1)}{2}} \beta^{\frac{m(m+1)}{2}} A_m ,$$

essendo A_m il determinante formato colle $a_{r,s}$ come L lo è colle $l_{r,s}$. Ma pei valori superiori di $l_{r,s}$ si hanno le

$$a_{r-1,s+1} - a_{r,s} = 0, \qquad a'_{r-1,s+1} - a'_{r,s} = b - a , \qquad a''_{r-1,s+1} - a''_{r,s} = (b-a) a'_{r-1,s} ,$$

$$a'''_{r-1,s+1} - a'''_{r,s} = (b-a) a''_{r-1,s} , \qquad \ldots ;$$

quindi, se nel determinante A_m si sottraggono dagli elementi dell'ultima linea quelli della penultima, da questi quelli della terz'ultima e così di seguito, tutte le linee meno la prima diventano divisibili per $b - a$, ed inoltre gli elementi della prima colonna sono tutti eguali a zero, meno il primo che è eguale all'unità. Ne consegue:

$$A_m = (b-a)^m \begin{vmatrix} 1 & a'_{m-1,1} & \ldots & a^{(m-1)}_{m-1,1} \\ 1 & a'_{m-2,1} & \ldots & a^{(m-1)}_{m-2,1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a'_{0,1} & \ldots & a^{(m-1)}_{0,1} \end{vmatrix} ,$$

ossia

$$A_m = (b-a)^m A_{m-1},$$

dalla quale:

$$A_m = (b-a)^{\frac{m(m+1)}{2}},$$

e sostituendo:

$$L_m = (\alpha\delta-\beta\gamma)^{\frac{m(m+1)}{2}}.$$

Per questo valore di L la equazione (5) diverrà:

$$(\alpha\delta-\beta\gamma)^{\frac{n(m+1)}{2}} \Delta_m = \Gamma_m,$$

la quale dimostra essere il determinante Δ_m un covariante od un invariante della forma binaria u. Questo teorema potrebbe anche generalizzarsi sostituendo ad u un covariante qualunque della forma stessa. Se $m=1$, Δ_1 è l'Hessiano della forma u, per cui: *l'Hessiano di una forma qualunque di grado superiore al secondo è un covariante della forma stessa*. Se $m=1, 2, 3, \ldots$ e supponiamo u ordinatamente dei gradi 2°, 4°, 6°, ..., saranno $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$ invarianti di quelle forme *). Quindi: *una forma binaria di grado pari* $2m$ *ha almeno un invariante del grado* $m+1$. Per la forma di quarto grado questo invariante è

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2 - a_2^3.$$

3. Sieno $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ due covarianti della forma u; la espressione

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

sarà pure un covariante di u. Infatti, indicando con $\Phi(\xi, \eta)$, $\Psi(\xi, \eta)$ le trasformate di φ, ψ mediante la sostituzione lineare (1), dalle equazioni:

$$(\alpha\delta-\beta\gamma)^\mu \varphi(x, y) = \Phi(\xi, \eta), \qquad (\alpha\delta-\beta\gamma)^\nu \psi(x, y) = \Psi(\xi, \eta)$$

deduconsi le

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} = (\alpha\delta-\beta\gamma)^\mu \left(\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \gamma\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = (\alpha\delta-\beta\gamma)^\mu \left(\beta\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \delta\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\xi} = (\alpha\delta-\beta\gamma)^\nu \left(\alpha\frac{\partial\psi}{\partial x} + \gamma\frac{\partial\psi}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial\eta} = (\alpha\delta-\beta\gamma)^\nu \left(\beta\frac{\partial\psi}{\partial x} + \delta\frac{\partial\psi}{\partial y}\right);$$

---

*) Il sig. SYLVESTER denomina questo invariante il « *catalecticant* » della forma u.

e per queste:

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)^{\mu+\nu+1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\frac{\partial\Psi}{\partial\eta} - \frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\frac{\partial\Psi}{\partial\xi},$$

la quale dimostra la proprietà enunciata. Vedremo nel seguente Capitolo una generalizzazione della medesima.

4. Sieno $x_1, x_2, \ldots x_n$ le radici dell'equazione $u(x, 1) = 0$, e $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ quelle della $U(\xi, 1) = 0$; si avranno le

$$(a_0, a_1, \ldots a_n)(x, y)^n = a_0(x - x_1 y)(x - x_2 y) \ldots (x - x_n y),$$

$$(A_0, A_1, \ldots A_n)(\xi, \eta)^n = A_0(\xi - \xi_1\eta)(\xi - \xi_2\eta) \ldots (\xi - \xi_n\eta);$$

ed indicando con $\Pi(x - x_r y)$ il prodotto di tutti i binomj lineari $x - x_1 y$, $x - x_2 y, \ldots$ la (2) potrà porsi sotto la forma:

$$a_0 \Pi[\alpha\xi + \beta\eta - x_r(\gamma\xi + \delta\eta)] = A_0 \Pi(\xi - \xi_r\eta),$$

ma

$$\alpha\xi + \beta\eta - x_r(\gamma\xi + \delta\eta) = (\alpha - \gamma x_r)\left(\xi - \frac{\delta x_r - \beta}{\alpha - \gamma x_r}\eta\right),$$

ed evidentemente

$$a_0 \Pi(\alpha - x_r\gamma) = A_0;$$

quindi si avrà:

$$\Pi\left(\xi - \frac{\delta x_r - \beta}{\alpha - \gamma x_r}\eta\right) = \Pi(\xi - \xi_r\eta),$$

per la quale:

$$\xi_r = \frac{\delta x_r - \beta}{\alpha - \gamma x_r}.$$

Rappresenti $P(x_1, x_2, \ldots x_n)$ il prodotto dei quadrati delle differenze delle radici dell'equazione $u(x, 1) = 0$; esso è una funzione razionale, intera, del grado $2(n-1)$, dei coefficienti dell'equazione medesima; pongasi

$$\psi(a_0, a_1, \ldots a_n) = a_0^{2(n-1)} P(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

ed analogamente

$$\psi(A_0, A_1, \ldots A_n) = A_0^{2(n-1)} P(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n);$$

ed osservando che pel valore superiore di ξ_r si ha:

$$(6) \qquad \xi_r - \xi_s = (\alpha\delta - \beta\gamma)\frac{x_r - x_s}{(\alpha - \gamma x_r)(\alpha - \gamma x_s)},$$

si otterrà:

$$P(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) = (\alpha\delta - \beta\gamma)^{n(n-1)} \frac{P(x_1, x_2, \ldots x_n)}{[\Pi(\alpha - \gamma x_r)]^{2(n-1)}},$$

ed in conseguenza:

$$(\alpha\delta-\beta\gamma)^{n(n-1)}\varphi(a_0, a_1, \dots a_n)=\varphi(A_0, A_1, \dots A_n);$$

cioè: *il discriminante di una forma binaria qualunque è un invariante della medesima.*

Ed in generale, dalla definizione di invariante e dalla formola (6) deducesi che: *ogni funzione simmetrica delle radici dell'equazione $u(x, 1)=0$, che sia anche una funzione delle differenze di esse, ed in ciascun termine della quale tutte le radici entrino uno stesso numero di volte, è un invariante della forma binaria u.*

Per esempio, supponendo n pari l'equazione (6) darà:

$$[(\xi_1-\xi_2)(\xi_3-\xi_4)\dots(\xi_{n-1}-\xi_n)]^2=(\alpha\delta-\beta\gamma)^n\frac{a_0^2}{A_0^2}[(x_1-x_2)(x_3-x_4)\dots(x_{n-1}-x_n)]^2;$$

ed analoghe relazioni si otterranno considerando tutti i prodotti ad $\frac{n}{2}$ ad $\frac{n}{2}$ dei quadrati delle differenze delle radici, nei quali ciascuna radice non si trovi che in un solo fattore. Quindi, sommando tutte quelle espressioni in numero

$$1.\,3.\,5\,\dots\,(n-3)(n-1),$$

giungesi alla

$$(\alpha\delta-\beta\gamma)^n a_0^2\sum[(x_1-x_2)(x_3-x_4)\dots(x_{n-1}-x_n)]^2$$
$$=A_0^2\sum[(\xi_1-\xi_2)(\xi_3-\xi_4)\dots(\xi_{n-1}-\xi_n)]^2.$$

Ora la espressione $\sum[(x_1-x_2)\dots(x_{n-1}-x_n)]^2$ è una funzione simmetrica delle radici $x_1, x_2, \dots$, dunque il prodotto di essa per a_0^2 sarà una funzione omogenea del secondo grado dei coefficienti $a_0, a_1, \dots$ ed in conseguenza sarà un invariante della forma u. Quindi: *tutte le forme binarie di grado pari hanno almeno un invariante quadratico.* La forma di quarto grado ha l'invariante quadratico:

$$a_0^2[(x_1-x_2)^2(x_3-x_4)^2+(x_1-x_3)^2(x_2-x_4)^2+(x_1-x_4)^2(x_2-x_3)^2]$$
$$=24(a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2).$$

Applicazione.—Sieno x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 le radici dell'equazione del quinto grado:

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)(x, 1)^5=0.$$

Per la (6), ponendo

$$[(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_1)]^2=\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),$$

si ha:

$$(\alpha\delta-\beta\gamma)^{10}a_0^4\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)=A_0^4\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5);$$

quindi le somme delle potenze delle dodici funzioni delle $x_1, x_2, \dots$ analoghe alla supe-

riore, cioè nelle quali ciascuna radice trovasi in due soli fattori, essendo funzioni simmetriche di quelle radici saranno invarianti di u. Ora, scrivendo per brevità $(1, 2, 3, 4, 5)$ in luogo di $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, le dodici funzioni sono le seguenti:

$$l_1 = (1, 2, 3, 4, 5), \qquad m_1 = (1, 3, 5, 2, 4),$$
$$l_2 = (1, 2, 4, 3, 5), \qquad m_2 = (1, 3, 2, 5, 4),$$
$$l_3 = (1, 2, 3, 5, 4), \qquad m_3 = (1, 3, 4, 2, 5),$$
$$l_4 = (1, 2, 5, 3, 4), \qquad m_4 = (1, 3, 2, 4, 5),$$
$$l_5 = (1, 2, 4, 5, 3), \qquad m_5 = (1, 4, 3, 2, 5),$$
$$l_6 = (1, 2, 5, 4, 3), \qquad m_6 = (1, 4, 2, 3, 5);$$

quindi, siccome indicando con D il discriminante della forma u si hanno le

$$l_1 m_1 = l_2 m_2 = \ldots = l_6 m_6 = \frac{5^5}{a_0^8} D,$$

anche le somme delle potenze delle espressioni

$$y_1 = a_0^4(l_1 + m_1), \quad y_2 = a_0^4(l_2 + m_2), \quad \ldots \quad y_6 = a_0^4(l_6 + m_6)$$

saranno invarianti di u, e quindi saranno tali i coefficienti dell'equazione del sesto grado di cui le radici sono $y_1, y_2, \ldots y_6$. Vedremo in seguito come si determinano i coefficienti di questa *risolvente* dell'equazione generale del quinto grado *).

CAP. II. — Dei Covarianti associati.

1. Sieno $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ due covarianti della forma binaria

$$u = (a_0, a_1, \ldots a_n)(x, y)^n$$

degli ordini m, s. Nel covariante $\varphi(x, y)$ si pongano in luogo delle x, y i binomj

$$x_1 = xX - \frac{1}{s}\frac{\partial\psi}{\partial y} Y, \qquad y_1 = yX + \frac{1}{s}\frac{\partial\psi}{\partial x} Y$$

e si sviluppi mediante la formola di Taylor la espressione

$$\varphi\left(xX - \frac{1}{s}\frac{\partial\psi}{\partial y} Y,\ yX + \frac{1}{s}\frac{\partial\psi}{\partial x} Y\right); \tag{7}$$

*) Hermite, *Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées* [The Cambridge and Dublin Mathematical Journal, t. IX (1854), p. 215].

si otterrà una funzione omogenea in X, Y del grado m, i coefficienti della quale sono tutti covarianti della forma u *). Per dimostrare questa proprietà si osservi che, supponendo trasformata la forma u nella (2) per la sostituzione lineare (1), si hanno analogamente alla (3) le due equazioni:

$$(8)\quad \begin{cases} k^{\lambda}\varphi(a_0, a_1, \ldots a_n, x, y) = \varphi(A_0, A_1, \ldots A_n, \xi, \eta) = \Phi(\xi, \eta), \\ k^{\nu}\psi(a_0, a_1, \ldots a_n, x, y) = \psi(A_0, A_1, \ldots A_n, \xi, \eta) = \Psi(\xi, \eta), \end{cases}$$

essendo $k = \alpha\delta - \beta\gamma$; dalla seconda delle quali ottengonsi le

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{k^{\nu+1}}\left(\delta\frac{\partial\Psi}{\partial\xi} - \gamma\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right), \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{1}{k^{\nu+1}}\left(\alpha\frac{\partial\Psi}{\partial\eta} - \beta\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\right).$$

Ora, se nei valori di x_1, y_1 si sostituiscono alle x, y i binomj lineari (1), si avranno per queste ultime equazioni le seguenti:

$$x_1 = \alpha X_1 + \beta Y_1, \qquad y_1 = \gamma X_1 + \delta Y_1,$$

essendo

$$X_1 = \xi X - \frac{1}{k^{\nu+1}}\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}Y, \qquad Y_1 = \eta X + \frac{1}{k^{\nu+1}}\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}Y;$$

quindi si avrà analogamente alla prima delle (8):

$$k^{\mu}\varphi(a_0, a_1, \ldots a_n, x_1, y_1) = \varphi(A_0, A_1, \ldots A_n, X_1, Y_1).$$

Ma, questa equazione essendo identica, dovranno i coefficienti delle potenze delle X, Y, negli sviluppi delle espressioni del primo e secondo membro essere ordinatamente eguali, per cui eguagliando per esempio i coefficienti di $X^{m-r}Y^r$ si avrà:

$$k^{\mu+r(\nu+1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right)^r\varphi = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\eta} - \frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^r\Phi. \text{ **)}$$

Dunque i coefficienti delle potenze di X, Y nello sviluppo della espressione (7) sono tutti covarianti della forma u.

2. Rappresentiamo lo sviluppo dell'espressione (7) con

$$(9)\qquad (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m)(X, Y)^m;$$

---

*) Hermite, l. c.

**) È noto come con questo simbolo si indichi la espressione

$$\frac{\partial^r\varphi}{\partial y^r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^r - r\frac{\partial^r\varphi}{\partial y^{r-1}\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^{r-1}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \ldots + (-1)^r\frac{\partial^r\varphi}{\partial x^r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^r.$$

ponendo per brevità:

$$p = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad q = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad \Delta_r = [p\,\varphi'(x) + q\,\varphi'(y)]^{(r)},$$

si avrà:

$$\frac{m(m-1)\dots(m-r+1)}{1.2.3\dots r}\,\alpha_r = \frac{1}{s^r}\,\frac{\Delta_r}{1.2.3\dots r}.$$

Si indichino con $\left(\frac{\partial \Delta_r}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial \Delta_r}{\partial y}\right)$ le derivate parziali della Δ_r considerando le p, q come costanti rispetto alle x, y; sarà:

$$\Delta_{r+1} = p\left(\frac{\partial \Delta_r}{\partial x}\right) + q\left(\frac{\partial \Delta_r}{\partial y}\right);$$

ma

$$(10)\quad \left(\frac{\partial \Delta_r}{\partial x}\right) = \frac{\partial \Delta_r}{\partial x} - \frac{\partial \Delta_r}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \Delta_r}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}, \qquad \left(\frac{\partial \Delta_r}{\partial y}\right) = \frac{\partial \Delta_r}{\partial y} - \frac{\partial \Delta_r}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \Delta_r}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y},$$

quindi, osservando che

$$\frac{\partial \Delta_r}{\partial p} = r\left(\frac{\partial \Delta_{r-1}}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial \Delta_r}{\partial q} = r\left(\frac{\partial \Delta_{r-1}}{\partial y}\right),$$

si ottiene:

$$\Delta_{r+1} = p\frac{\partial \Delta_r}{\partial x} + q\frac{\partial \Delta_r}{\partial y} - r\left[p_1\left(\frac{\partial \Delta_{r-1}}{\partial x}\right) + q_1\left(\frac{\partial \Delta_{r-1}}{\partial y}\right)\right],$$

essendo

$$p_1 = p\frac{\partial p}{\partial x} + q\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad q_1 = p\frac{\partial q}{\partial x} + q\frac{\partial q}{\partial y}.$$

Se nella equazione superiore poniamo per $\left(\frac{\partial \Delta_{r-1}}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial \Delta_{r-1}}{\partial y}\right)$ espressioni analoghe alle (10), e poniamo

$$p_2 = p_1\frac{\partial p}{\partial x} + q_1\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad q_2 = p_1\frac{\partial q}{\partial x} + q_1\frac{\partial q}{\partial y},$$

si ottiene:

$$(11)\quad \Delta_{r+1} = p\frac{\partial \Delta_r}{\partial x} + q\frac{\partial \Delta_r}{\partial y} - r\left(p_1\frac{\partial \Delta_{r-1}}{\partial x} + q_1\frac{\partial \Delta_{r-1}}{\partial y}\right) + r\left(p_2\frac{\partial \Delta_{r-1}}{\partial p} + q_2\frac{\partial \Delta_{r-1}}{\partial q}\right).$$

Ora, p, q essendo funzioni omogenee del grado $s-1$ rispetto alle x, y, si hanno le relazioni:

$$x\frac{\partial p}{\partial x} + y\frac{\partial p}{\partial y} = (s-1)p, \qquad x\frac{\partial q}{\partial x} + y\frac{\partial q}{\partial y} = (s-1)q,$$

dalle quali, osservando essere $\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial q}{\partial y}$ e ponendo

un covariante della forma u; supponendo

$$u(\alpha X + \beta Y,\ \gamma X + \delta Y) = (A_0,\ A_1,\ \ldots\ A_n)(X,\ Y)^n, \tag{14}$$

si avrà per la definizione di covariante [Cap. I, equazione (3)]:

$$k^\mu \varphi(\alpha X + \beta Y,\ \gamma X + \delta Y) = (C_0,\ C_1,\ \ldots\ C_m)(X,\ Y)^m, \tag{15}$$

essendo i coefficienti $C_0, C_1, \ldots$ formati cogli $A_0, A_1, \ldots$ come i coefficienti $c_0, c_1, \ldots$ del covariante φ lo sono cogli $a_0, a_1, \ldots$ della forma data u. Ora, se nelle (14),(15) supponiamo

$$\alpha = x,\quad \beta = -\frac{1}{s}\frac{\partial \psi}{\partial y};\quad \gamma = y,\quad \delta = \frac{1}{s}\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{16}$$

evidentemente le $A_0, A_1, \ldots$ diventano i covarianti associati $\psi_0, \psi_1, \ldots$; ed essendo

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \frac{1}{s}\left(x\frac{\partial \psi}{\partial x} + y\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = \psi,$$

dalla (14) si ha:

$$\psi^\mu \varphi\left(xX - \frac{1}{s}\frac{\partial \psi}{\partial y}Y,\ \ yX + \frac{1}{s}\frac{\partial \psi}{\partial x}Y\right) = (C_0,\ C_1,\ \ldots\ C_m)(X,\ Y)^m,$$

nella quale ora i coefficienti $C_0, C_1, \ldots$ sono formati coi covarianti $\psi_0, \psi_1, \ldots \psi_n$ come le $c_0, c_1, \ldots$ lo sono coi coefficienti $a_0, a_1, \ldots$; e quindi sono funzioni omogenee dei covarianti associati $\psi_0, \psi_1, \ldots$ Ma quest'ultima equazione dà evidentemente:

$$\psi^\mu \varphi(x,\ y) = C_0; \tag{17}$$

dunque il prodotto del covariante φ per una potenza intera μ del covariante ψ è una funzione omogenea dei covarianti associati al covariante medesimo ψ. L'equazione medesima dà anche per la (9):

$$\psi^\mu \alpha_i = C_i\,. \tag{18}$$

Notiamo che, essendo φ di grado p rispetto ai coefficienti $a_0, a_1, \ldots,$ sarà

$$\mu = \tfrac{1}{2}(np - m).$$

Se il covariante ψ è la stessa forma u, ponendo

$$u\left(xX - \frac{1}{n}\frac{\partial u}{\partial y}Y,\ \ yX + \frac{1}{n}\frac{\partial u}{\partial x}Y\right) = (u_0,\ u_1,\ \ldots\ u_n)(X,\ Y)^n \tag{19}$$

i covarianti $u_0, u_1, \ldots$ saranno i covarianti associati alla forma data.

Una equazione analoga alla (17) sussiste per gli invarianti. Sia $\lambda(a_0,\ a_1,\ \ldots\ a_n)$

un invariante di grado q della forma u; si avrà per la (14), posto $\nu = \frac{1}{2} n q$:

$$k^{\nu} \lambda(a_0, a_1, \dots a_n) = \lambda(A_0, A_1, \dots A_n);$$

ora, se le α, β, γ, δ assumono i valori (16), le A_0, A_1, ... diventano ψ_0, ψ_1, ..., e quindi:

$$\psi^{\nu} \lambda(a_0, a_1, \dots a_n) = \lambda(\psi_0, \psi_1, \dots \psi_n). \tag{20}$$

Esempio. — Supponiamo che il covariante $\varphi(x, y)$ sia l'Hessiano v della forma u, cioè:

$$v = \frac{1}{n^2(n-1)^2} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{vmatrix} = (c_0, c_1, \dots c_p)(x, y)^p \quad \begin{Bmatrix} p = 2(n-2) \\ [illegible] \end{Bmatrix},$$

e ψ eguale ad u. Essendo evidentemente $c_0 = a_0 a_2 - a_1^2$, per la proprietà dimostrata sopra si avrà:

$$C_0 = u\, u_2 - u_1^2,$$

e quindi per la (17):

$$u^2 v = u\, u_2 - u_1^2,$$

ossia

$$u\, v = u_2,$$

giacchè $u_0 = u$, $u_1 = 0$. Così, essendo

$$c_1 = \frac{1}{2}(a_0 a_3 - a_1 a_2), \quad c_2 = \frac{1}{2(2n-5)}[(n-3) a_0 a_4 + 2 a_1 a_3 - (n-1) a_2^2], \text{ ecc.},$$

si avranno per la (18):

$$u^2 \alpha_1 = \frac{1}{2} u\, u_3, \quad u^2 \alpha_2 = \frac{1}{2(2n-5)}[(n-3) u\, u_4 - (n-1) u_2^2], \text{ ecc.},$$

ossia

$$u\, \alpha_1 = \frac{1}{2} u_3, \quad u\, \alpha_2 = \frac{1}{2(2n-5)}[(n-3) u_4 - (n-1) u\, v^2], \text{ ecc.}$$

Applicazione. — È noto che, ponendo, nell'equazione $u(x, 1) = 0$,

$$x = \frac{X - a_1}{a_0},$$

si ottiene una trasformata nella quale il coefficiente di X^{n-1} è eguale a zero. Ora i coefficienti degli altri termini sono ordinatamente eguali ai coefficienti delle più alte potenze della x nei covarianti associati della forma u. Infatti, ponendo nell'equazione (19)

$\frac{X}{u}$, $\frac{Y}{u}$ in luogo di X, Y, ed in seguito facendo nella medesima $x = 1$, $y = 0$, $Y = 1$, si ottiene:

$$u\left(\frac{X - a_1}{a_0}, 1\right) = \frac{1}{a_0^n}(p_0, p_1, \ldots p_n)(X, 1)^n,$$

essendo p_0, p_1, ... i coefficienti delle più alte potenze di x nei covarianti associati u_0, u_1, ..., e quindi $p_0 = a_0$, $p_1 = 0$.

4. Fra i covarianti associati ad un covariante qualsivoglia della forma u ed i covarianti associati u_0, u_1, u_2, ... alla forma stessa, ha luogo una relazione la quale può tornar utile nella ricerca di quei primi covarianti *). Poniamo nell'equazione (13):

$$-\frac{1}{s}\frac{\partial\psi}{\partial y} = p, \qquad \frac{1}{s}\frac{\partial\psi}{\partial x} = q,$$

ed osservando che per lo sviluppo di TAYLOR si ha:

$$u(pY + xX, qY + yX) = u(p, q)Y^n + \left(x\frac{\partial u}{\partial p} + y\frac{\partial u}{\partial q}\right)Y^{n-1}X + \ldots,$$

risulterà:

$$\psi_r = \frac{1}{n(n-1)\ldots(r+1)}\left(x\frac{\partial u}{\partial p} + y\frac{\partial u}{\partial q}\right)^{(n-r)}.$$

Ora dalle equazioni

$$\psi_1 = \frac{1}{ns}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right), \qquad \psi = \frac{1}{s}\left(x\frac{\partial\psi}{\partial x} + y\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$$

deduconsi le

$$x\psi_1 - \frac{1}{n}\frac{\partial u}{\partial y}\psi = np, \qquad y\psi_1 + \frac{1}{n}\frac{\partial u}{\partial x}\psi = nq;$$

per cui, se nella (19) si pone $X = \psi_1$, $Y = \psi$, si ottiene:

$$n^n u(p, q) = (u_0, u_1, \ldots u_n)(\psi_1, \psi)^n; \tag{21}$$

inoltre, essendo per le superiori:

$$n\frac{\partial p}{\partial\psi_1} = x, \qquad n\frac{\partial q}{\partial\psi_1} = y,$$

indicando con $F(\psi_1, \psi)$ il secondo membro della (21), si hanno le

$$\frac{\partial F}{\partial\psi_1} = n^{n-1}\left(x\frac{\partial u}{\partial p} + y\frac{\partial u}{\partial q}\right), \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial\psi_1^2} = n^{n-2}\left(u\frac{\partial u}{\partial p} + y\frac{\partial u}{\partial q}\right)^{(2)}, \text{ ecc.},$$

*) [XXXV, pp. 223-231, formola (8)].

quindi, rammentando il valore di ψ_r trovato sopra, si giunge alla

$$u^r \psi_r = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_r)(\psi_1, \psi)^r. \tag{22}$$

Dunque: *i covarianti associati ad un covariante qualsivoglia ψ sono esprimibili in funzione di ψ_1, ψ e dei covarianti associati alla forma data.*

Esempio. — Consideriamo la forma cubica $(a_0, a_1, a_2, a_3)(x, y)^3$ ed indichiamo con δ il discriminante della medesima, cioè

$$\delta = -a_0^2 a_3^2 + 6 a_0 a_1 a_2 a_3 + 3 a_1^2 a_2^2 - 4 a_0 a_2^3 - 4 a_1^3 a_3;$$

supponendo nella (20) $\lambda = \delta$, $\psi = u$ si ottiene, rammentando essere $u_0 = u$, $u_1 = 0$,

$$u^4 \delta = -(u_3^2 + 4 u_2^3);$$

ma indicando con v l'Hessiano della forma cubica, cioè ponendo

$$v = (a_0 a_2 - a_1^2, \tfrac{1}{2}(a_0 a_3 - a_1 a_2), a_1 a_3 - a_2^2)(x, y)^2,$$

si è trovato nell'esempio antecedente $u_2 = u v$; inoltre, ponendo

$$\theta = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

si ha pel valore di α_1 dello stesso esempio $u_3 = u\theta$, essendo in questo caso $\alpha_1 = \frac{1}{2}\theta$; quindi sostituendo si ottiene la relazione *):

$$u^2 \delta + \theta^2 + 4 v^3 = 0. \tag{23}$$

Ora, se nella (22) supponesi $\psi = v$, essendo $v_0 = u$, $v_1 = -\frac{1}{2}\theta$, si hanno le

$$u^2 v_2 = \tfrac{1}{4}\theta^2 u + v^2 u_2, \qquad u^3 v_3 = -\tfrac{1}{8}\theta^3 u - \tfrac{3}{2}\theta v^2 u_2 + v^3 u_3,$$

le quali pei valori superiori di u_2, u_3 riduconsi alle

$$u v_2 = \tfrac{1}{4}(\theta^2 + 4 v^3), \qquad u^2 v_3 = -\tfrac{1}{8}\theta(\theta^2 + 4 v^3),$$

e quindi per la relazione (23) si avranno:

$$v_2 = -\tfrac{1}{4} u \delta, \qquad v_3 = \tfrac{1}{8}\theta\delta.$$

Ne risulta che per le forme cubiche i covarianti associati all'Hessiano v sono funzioni intere, razionali, dei covarianti u, v, θ e del discriminante δ.

*) Cayley. *Nouvelles recherches sur les Covariants* (Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. XLVII (1854), pp. 109-125 (p. 118)).

CAP. III. — Delle equazioni alle derivate, caratteristiche pei covarianti e per gli invarianti.

1. Abbiamo osservato nel Cap. antecedente (n° 3) che, essendo

$$\varphi(x, y) = (c_0, c_1, \ldots c_m)(x, y)^m \qquad \text{e} \qquad \psi(x, y)$$

due covarianti della forma u, se si pone

$$\psi^\mu \varphi\left(xX - \frac{1}{s}\frac{\partial \psi}{\partial y} Y,\ yX + \frac{1}{s}\frac{\partial \psi}{\partial x} Y\right) = (C_0, C_1, \ldots C_m)(X, Y)^m,$$

i coefficienti C_0, C_1, ... sono formati coi covarianti associati ψ_0, ψ_1, ... ψ_n del covariante ψ, come i coefficienti c_0, c_1, ... del covariante φ lo sono coi coefficienti della forma data. Ora, considerando C_ε come funzione di ψ_0, ψ_1, ... si hanno le

$$\frac{\partial C_\varepsilon}{\partial x} = \sum_0^n \frac{\partial C_\varepsilon}{\partial \psi_r}\frac{\partial \psi_r}{\partial x}, \qquad \frac{\partial C_\varepsilon}{\partial y} = \sum_0^n \frac{\partial C_\varepsilon}{\partial \psi_r}\frac{\partial \psi_r}{\partial y},$$

e da queste:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial C_\varepsilon}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial C_\varepsilon}{\partial x} = \sum_0^n \frac{\partial C_\varepsilon}{\partial \psi_r}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi_r}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \psi_r}{\partial x}\right),$$

ma per la (18):

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial C_\varepsilon}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial C_\varepsilon}{\partial x} = \psi^\mu\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \alpha_\varepsilon}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \alpha_\varepsilon}{\partial x}\right),$$

quindi, rammentando la (12), si avrà:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial C_\varepsilon}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial C_\varepsilon}{\partial x} = s[(m - \varepsilon) C_{\varepsilon+1} - \varepsilon(s - 1) h C_{\varepsilon-1}].$$

Analogamente, supponendo nella (7) $\varphi = u$, le formole (12), (13) dànno:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi_r}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \psi_r}{\partial x} = s[(n - r)\psi_{r+1} - r(s - 1) h \psi_{r-1}],$$

per cui, sostituendo e ponendo per brevità

$$(24) \qquad M(C_\varepsilon) = \sum_0^n r \psi_{r-1}\frac{\partial C_\varepsilon}{\partial \psi_r}, \qquad N(C_\varepsilon) = \sum_0^n (n - r)\psi_{r+1}\frac{\partial C_\varepsilon}{\partial \psi_r},$$

si ottiene la seguente equazione:

$$N(C_\varepsilon) - (m - \varepsilon) C_{\varepsilon+1} = (s - 1) h [M(C_\varepsilon) - \varepsilon C_{\varepsilon-1}].$$

Osserviamo che le espressioni

$$M(C_s) - sC_{s-1}, \qquad N(C_s) - (n-s)C_{s+1}$$

sono identicamente nulle allorquando suppongasi il covariante φ eguale alla forma u, giacchè in questo caso le C_0, C_1, ... coincidono ordinatamente coi covarianti ψ_0, ψ_1, ... ψ_n; perciò l'equazione superiore, dovendo sussistere qualunque sia il covariante φ, si spezzerà nelle due:

$$(25) \qquad M(C_s) - sC_{s-1} = 0, \qquad N(C_s) - (n-s)C_{s+1} = 0.$$

2. Queste equazioni contengono evidentemente una proprietà relativa al modo di composizione dei coefficienti C_0, C_1, ... coi covarianti ψ_0, ψ_1, ...; ora questo modo di composizione si è dimostrato identico a quello dei coefficienti c_0, c_1, ... del covariante φ rispetto ai coefficienti a_0, a_1, ... della forma u; se dunque indichiamo, come nelle equazioni (24), con P, Q i simboli di operazione

$$\sum_1^m i a_{i-1} \frac{\partial}{\partial a_i}, \qquad \sum_0^{m-1} (m-i) a_{i+1} \frac{\partial}{\partial a_i},$$

si avrà che un coefficiente c_s di un qualsivoglia covariante φ della forma u dovrà soddisfare alle due equazioni seguenti analoghe alle (25):

$$(26) \qquad P(c_s) = sc_{s-1}, \qquad Q(c_s) = (n-s)c_{s+1}.$$

Questa proprietà dei coefficienti di un covariante conduce a molte ed importanti conseguenze. Osserviamo dapprima che, essendo c_0, c_1, ... funzioni di a_0, a_1, ..., si ha:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_r} = \frac{\partial \varphi}{\partial c_0}\frac{\partial c_0}{\partial a_r} + \frac{\partial \varphi}{\partial c_1}\frac{\partial c_1}{\partial a_r} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial c_n}\frac{\partial c_n}{\partial a_r},$$

per cui saranno:

$$P(\varphi) = \sum_0^n \frac{\partial \varphi}{\partial c_s} P(c_s), \qquad Q(\varphi) = \sum_0^n \frac{\partial \varphi}{\partial c_s} Q(c_s);$$

ma

$$\frac{\partial \varphi}{\partial c_s} = \frac{m(m-1)\dots(m-s+1)}{1.2.3.\dots s} x^{m-s} y^s,$$

quindi per la (26) risulteranno:

$$P(\varphi) = \sum_1^m \frac{m(m-1)\dots(m-s+1)}{1.2.3.\dots(s-1)} c_{s-1} x^{m-s} y^s,$$

$$Q(\varphi) = \sum_0^{m-1} \frac{m(m-1)\dots(m-s)}{1.2.3.\dots s} c_{s+1} x^{m-s} y^s,$$

ossia

$$(27) \qquad P(\varphi) = y\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad Q(\varphi) = x\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \text{*)}$$

equazioni le quali debbono essere soddisfatte da un covariante φ qualsivoglia.

Se con $QP(c_s)$, $PQ(c_s)$ si indicano i risultati che si ottengono eseguendo sulle espressioni $P(c_s)$, $Q(c_s)$ le operazioni Q, P, essendo

$$QP(c_s) = \sum_0^n (n-i)a_{i+1}\frac{\partial P(c_s)}{\partial a_i}, \quad \frac{\partial P(c_s)}{\partial a_i} = \sum_1^n r a_{r-1}\frac{\partial^2 c_s}{\partial a_i \partial a_r} + (i+1)\frac{\partial c_s}{\partial a_{i-1}},$$

si avrà:

$$QP(c_s) = \sum_0^n \sum_1^n (n-i) r a_{r-1} a_{i+1}\frac{\partial^2 c_s}{\partial a_i \partial a_r} + \sum_0^n (n-r)(r+1)a_{r+1}\frac{\partial c_s}{\partial a_{r+1}};$$

ed analogamente:

$$PQ(c_s) = \sum_1^n \sum_0^n (n-i) r a_{r-1} a_{i+1}\frac{\partial^2 c_s}{\partial a_i \partial a_r} + \sum_1^n (n-r+1) r a_{r-1}\frac{\partial c_s}{\partial a_{r-1}};$$

quindi:

$$(28) \qquad QP(c_s) - PQ(c_s) = 2\sum_1^n r a_r \frac{\partial c_s}{\partial a_r} - n\sum_0^n a_r \frac{\partial c_s}{\partial a_r};$$

ma per le (26):

$$QP(c_s) = sQ(c_{s-1}) = s(m-s+1)c_s,$$

$$PQ(c_s) = (m-s)P(c_{s+1}) = (m-s)(s+1)c_s;$$

dunque:

$$QP(c_s) - PQ(c_s) = (2s-m)c_s,$$

o sostituendo:

$$2\sum_1^n r a_r \frac{\partial c_s}{\partial a_r} - n\sum_0^n a_r \frac{\partial c_s}{\partial a_r} = (2s-m)c_s.$$

Se ora supponiamo che i coefficienti $c_0, c_1, \ldots$ siano di grado p rispetto agli $a_0, a_1, \ldots$, si avrà:

$$(29) \qquad \sum_0^n a_r \frac{\partial c_s}{\partial a_r} = p c_s$$

e l'equazione superiore diverrà

$$(30) \qquad \sum_1^n r a_r \frac{\partial c_s}{\partial a_r} = \frac{1}{2}(2s + np - m)c_s.$$

Questa equazione, che possiamo sostituire ad una delle (26), quando abbiasi riguardo

*) [illegible]

alla (29), contiene una proprietà di omogeneità dei coefficienti c_0, c_1, ... che denomineremo *omogeneità* [illegible]. Infatti, se [illegible]

[illegible]

del coefficiente c_s il numero $q_1 + 2 q_2 + \ldots + n q_n$, essendo per la equazione (30)

(31) $q_1 + 2 q_2 + \ldots +$ [illegible]

questo indice riterrà lo stesso valore per tutti i termini di c_s; cioè c_s sarà omogeneo in indice.

Quindi per un covariante φ di ordine m e di grado p, l'indice del coefficiente c sarà $\frac{1}{2}(np - m)$ [numero intero che abbiamo denominato (Cap. I) indice del covariante φ], e per la prima delle (26) dovrà lo stesso coefficiente soddisfare alla

(32) [illegible]

Se poi osservasi che dalla seconda delle (26) si hanno le

(33) [illegible]

è evidente che la ricerca di un covariante riducesi a quella del coefficiente del suo *primo termine*, giacchè quando questo sia noto gli altri deduconsi di seguito mediante quelle equazioni. Ma la determinazione di questi coefficienti può ancora ridursi più semplice per la seguente proprietà dei medesimi. Il coefficiente c_m, l'indice del quale per la (31) è $\frac{1}{2}(np + m)$, deve soddisfare per la seconda delle (26) alla

[illegible] $= 0$.

Ora è chiaro che, se nel coefficiente c_0 di indice $\frac{1}{2}(np - m)$ si sostituiscono ordinatamente i coefficienti a_n, a_{n-1}, ... a_0, l'indice dell'espressione risultante sarà $\frac{1}{2}(pn + m)$, e la medesima dovrà soddisfare una equazione della forma della superiore, ottenendosi questa coll'operare quella permutazione sulla (32). Quindi la espressione, che deducesi da c_0 mediante quella permutazione, sarà il valore del coefficiente c_m od al più potrà differirne d'un coefficiente numerico. Se inoltre osserviamo che per la prima delle (26) si hanno:

[illegible]

e che i simboli delle operazioni P, Q si scambiano per quella permutazione, evidente-

mente i valori dei coefficienti c_{m-1}, c_{m-2}, ... od i prodotti di essi per un coefficiente numerico si dedurranno da quelli di c_1, c_2, ... permutando in questi le a_0, a_1, ... nelle a_n, a_{n-1}, ... Siccome poi anche le equazioni (27) si scambiano per le permutazioni:

$$\begin{matrix} a_0, & a_1, & \dots a_n, & x, & y \\ a_n, & a_{n-1}, & \dots a_0, & y, & x \end{matrix} \quad \Bigg| \quad \begin{matrix} a_0, & a_1, & \dots a_n, & x, & y \\ a_n, & a_{n-1}, & \dots a_0, & -y, & -x, \end{matrix}$$

il coefficiente numerico suddetto non potrà essere che l'unità negativa.

Esempio. — Consideriamo il covariante di terzo ordine e di terzo grado, ed in conseguenza di indice tre, della forma cubica

$$(a_0, a_1, a_2, a_3)(x\ y)^3.$$

Indicando questo covariante (il θ dell'esempio del n° 4, Cap. II) con

$$(c_0, c_1, c_2, c_3)(x, y)^3,$$

sarà c_0 una funzione omogenea del terzo grado e di indice tre dei coefficienti a_0, a_1, a_2, a_3, e quindi si avrà:

$$c_0 = a_0^2 a_3 + A a_0 a_1 a_2 + B a_1^3,$$

essendo A, B coefficienti numerici a determinarsi. Ponendo questa espressione di c_0 nella (32) ottiensi:

$$a_0(A a_0 a_2 + 3 B a_1^2) + 2 A a_0 a_1^2 + 3 a_0^2 a_2 = 0,$$

la quale, dovendo essere identicamente soddisfatta, dà pei coefficienti numerici A, B i valori:

$$A = -3, \qquad B = 2.$$

Sarà dunque:

$$c_0 = a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3,$$

e per le (33):

$$c_1 = \frac{1}{3} Q(c_0) = a_0 a_1 a_3 - 2 a_0 a_2^2 + a_1^2 a_2,$$

$$c_2 = \frac{1}{2} Q(c_1) = - a_3 a_2 a_0 + 2 a_3 a_1^2 - a_2^2 a_1,$$

$$c_3 = \quad Q(c_2) = - a_3^2 a_0 + 3 a_3 a_2 a_1 - 2 a_2^3.$$

I valori di c_2, c_3 deduconsi evidentemente da quelli di c_1, c_0 permutando in questi le a_0, a_1, a_2, a_3 in a_3, a_2, a_1, a_0 e moltiplicando le espressioni che ne risultano per -1.

3. Abbiamo dimostrato che un covariante qualunque φ della forma u deve soddisfare alle due equazioni (27). Reciprocamente, se una funzione $\varphi(a_0, a_1, \dots a_n, x, y)$

omogenea di grado p e dell'ordine m soddisfa le equazioni (27), essa è un covariante della forma u; per cui quelle equazioni essendo le necessarie e sufficienti a caratterizzare un covariante, si denomineranno *equazioni caratteristiche dei covarianti*. Infatti, nella funzione $\varphi(a_0, a_1, \dots a_n, x, y)$ sostituiamo ordinatamente, in luogo delle $a_0, a_1, \dots a_n$, x, y le $A_0, A_1, \dots A_n, \xi, \eta$; indicando con Φ la funzione che ne risulta, essa sodisferà alle due equazioni:

$$(34) \qquad \sum_0^n r A_{r-1} \frac{\partial \Phi}{\partial A_r} = \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \qquad \sum_0^n (n-r) A_{r+1} \frac{\partial \Phi}{\partial A_r} = \xi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}.$$

Ora, se $A_0, A_1, \dots$ sono i coefficienti ottenuti operando la sostituzione lineare (1) sulla forma u [(2), Cap. I], si ha per lo sviluppo di TAYLOR:

$$A_r = \frac{1}{n(n-1)\dots(n-r+1)} \left(\beta \frac{\partial}{\partial \alpha} + \delta \frac{\partial}{\partial \gamma}\right)^r A_0,$$

od anche

$$A_r = \frac{1}{n(n-1)\dots(r+1)} \left(\alpha \frac{\partial}{\partial \beta} + \gamma \frac{\partial}{\partial \delta}\right)^{n-r} A_n;$$

per cui, indicando con U, V le operazioni

$$\alpha \frac{\partial}{\partial \beta} + \gamma \frac{\partial}{\partial \delta}, \qquad \beta \frac{\partial}{\partial \alpha} + \delta \frac{\partial}{\partial \gamma},$$

si avranno le

$$(35) \qquad U(A_r) = r A_{r-1}, \qquad V(A_r) = (n-r) A_{r+1}.$$

Ma dalle

$$k\xi = \delta x - \beta y, \qquad k\eta = \alpha y - \gamma x$$

deduconsi facilmente le

$$U(\xi) = -\eta, \quad V(\xi) = 0; \qquad U(\eta) = 0, \quad V(\eta) = -\xi.$$

Quindi, se con $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\right), \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\right), \dots$ si indicano le derivate di Φ rispetto alle $\alpha, \beta, \dots$ contenute nelle ξ, η si hanno le

$$\alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\right) + \gamma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \delta}\right) = -\eta \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \qquad \beta \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\right) + \delta \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma}\right) = -\xi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}.$$

Le equazioni (34) per le (35), e per queste ultime, diventano:

$$\alpha \left[\sum_0^n \frac{\partial \Phi}{\partial A_r} \frac{\partial A_r}{\partial \beta} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\right)\right] + \gamma \left[\sum_0^n \frac{\partial \Phi}{\partial A_r} \frac{\partial A_r}{\partial \delta} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \delta}\right)\right] = 0,$$

$$\beta \left[\sum_0^n \frac{\partial \Phi}{\partial A_r} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\right)\right] + \delta \left[\sum_0^n \frac{\partial \Phi}{\partial A_r} \frac{\partial A_r}{\partial \gamma} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma}\right)\right] = 0.$$

ossia

$$(36) \qquad U(\Phi) = 0, \qquad V(\Phi) = 0;$$

e da queste osservando che

$$UV(\Phi) = \alpha\left(\beta\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha\partial\beta} + \delta\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma\partial\beta} + \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\right) + \gamma\left(\beta\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha\partial\delta} + \delta\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma\partial\delta} + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}\right),$$

$$VU(\Phi) = \beta\left(\alpha\frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta\partial\alpha} + \gamma\frac{\partial^2\Phi}{\partial\delta\partial\alpha} + \frac{\partial\Phi}{\partial\beta}\right) + \delta\left(\alpha\frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta\partial\gamma} + \gamma\frac{\partial^2\Phi}{\partial\delta\partial\gamma} + \frac{\partial\Phi}{\partial\delta}\right),$$

deducesi la seguente:

$$(37) \qquad UV(\Phi) - VU(\Phi) = \alpha\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} + \gamma\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma} - \beta\frac{\partial\Phi}{\partial\beta} - \delta\frac{\partial\Phi}{\partial\delta} = 0.$$

Da ultimo, essendo le A_0, A_1, ... funzioni omogenee dell'ennesimo grado delle α, β, γ, δ, si ha:

$$\alpha\frac{\partial A_r}{\partial\alpha} + \beta\frac{\partial A_r}{\partial\beta} + \gamma\frac{\partial A_r}{\partial\gamma} + \delta\frac{\partial A_r}{\partial\delta} = nA_r;$$

e siccome pei valori superiori di ξ, η si hanno le

$$\alpha\frac{\partial\xi}{\partial\alpha} + \beta\frac{\partial\xi}{\partial\beta} + \gamma\frac{\partial\xi}{\partial\gamma} + \delta\frac{\partial\xi}{\partial\delta} = -\xi, \qquad \alpha\frac{\partial\eta}{\partial\alpha} + \beta\frac{\partial\eta}{\partial\beta} + \gamma\frac{\partial\eta}{\partial\gamma} + \delta\frac{\partial\eta}{\partial\delta} = -\eta,$$

sarà:

$$\alpha\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\right) + \beta\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\beta}\right) + \gamma\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}\right) + \delta\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\delta}\right) = -\left(\xi\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + \eta\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right) = -m\Phi,$$

e quindi:

$$\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} + \beta\frac{\partial\Phi}{\partial\beta} + \gamma\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma} + \delta\frac{\partial\Phi}{\partial\delta} = n\sum_0^r A_r\frac{\partial\Phi}{\partial A_r} - m\Phi = (np - m)\Phi = 2\mu\Phi.$$

Questa equazione e la (37) dànno le seguenti:

$$\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} + \gamma\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma} = \mu\Phi, \qquad \beta\frac{\partial\Phi}{\partial\beta} + \delta\frac{\partial\Phi}{\partial\delta} = \mu\Phi;$$

dalla integrazione delle quali e di una qualunque delle (36) considerate come equazioni simultanee ottiensi:

$$\Phi = (\alpha\delta - \beta\gamma)^\mu\lambda,$$

essendo λ una costante rispetto alle α, β, ... funzione delle a_0, a_1, ... a_n, x, y. Per determinare la forma di questa funzione λ pongasi nell'equazione superiore $\alpha = \delta = 1$, $\beta = \gamma = 0$, nel qual caso le A_0, A_1, ... ξ, η diventano ordinatamente le a_0, a_1, ..., x, y

e si avrà:

$$\lambda = \varphi(a_0, a_1, \ldots a_n, x, y),$$

e sostituendo:

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)^{\lambda}\varphi(x, y) = \Phi(\xi, \eta),$$

la quale appunto è la equazione che definisce un covariante (Cap. I).

4. Mediante considerazioni analoghe alle superiori trovasi facilmente che le equazioni caratteristiche per un invariante ψ della forma u sono le due seguenti:

$$P(\psi) = 0, \qquad Q(\psi) = 0, \tag{38}$$

e che inoltre da queste, supponendo essere q il grado di ψ, si deduce la

$$\sum i\, a_i \frac{\partial \psi}{\partial a_i} = \frac{nq}{2}\psi, \tag{39}$$

cioè che l'invariante è omogeneo in indice, e l'indice di ogni suo termine è $\frac{1}{2}nq$; finalmente, che l'invariante stesso non alterasi permutando le $a_0, a_1, \ldots$ nelle $a_n, a_{n-1}, \ldots$ Quindi una funzione omogenea ψ delle $a_0, a_1, \ldots,$ di grado q, di indice $\frac{1}{2}nq$, la quale soddisfi all'equazione $P(\psi) = 0$ è un invariante della forma u. Ora, osservando essere queste (meno il valore dell'indice) le proprietà che caratterizzano il primo coefficiente di un covariante, si comprenderà che gli invarianti di una forma di grado n potranno essere primi coefficienti di covarianti di forme di gradi maggiori di n.

Esempio I. — Determiniamo l'invariante quadratico di una forma u di grado n pari, del quale abbiamo provato l'esistenza al Cap. I. Questo invariante sarà di indice n, per cui si avrà:

$$\psi = a_0 a_n + B_1 a_1 a_{n-1} + B_2 a_2 a_{n-2} + \ldots + B_{\frac{n}{2}} a_{\frac{n}{2}}^2,$$

essendo $B_1, B_2, \ldots$ coefficienti numerici. Ora, sostituendo questa espressione in una qualunque delle (38), si ottengono fra i coefficienti $B_1, B_2, \ldots$ le relazioni:

$$B_1 + n = 0, \quad 2B_2 + (n-1)B_1 = 0, \quad 3B_3 + (n-2)B_2 = 0, \quad \ldots,$$

le quali dànno:

$$B_r = (-1)^r \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots r}, \quad B_{\frac{n}{2}} = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{2} \frac{n(n-1)\ldots(\frac{1}{2}n+1)}{1.2\ldots\frac{1}{2}n}.$$

Se ora assumiamo l'invariante ψ per coefficiente del primo termine di un covariante d'ordine ρ della forma del grado $(n+1)$:

$$(a_0, a_1, \ldots a_{n+1})(x, y)^{n+1},$$

essendo n l'indice di ψ, si avrà per determinare ρ la formola:

$$n = \tfrac{1}{2}[2(n+1) - \rho],$$

da cui

$$\rho = 2.$$

Dunque: *tutte le forme di grado dispari hanno un covariante di secondo grado e di secondo ordine.*

Esempio II. — Sia $\psi(a_0, a_1, \ldots a_n)$ un invariante di grado q della forma u, e considerando una seconda forma:

$$f = (b_0, b_1, \ldots b_m)(x, y)^m$$

di grado $m > n$, si sostituiscano ordinatamente nell'invariante ψ, in luogo di $a_0, a_1, \ldots,$ le espressioni:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}, \quad \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y}, \quad \ldots \quad \frac{\partial^n f}{\partial y^n},$$

le quali indicheremo per brevità con $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$. La espressione $\psi(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n)$ sarà un covariante di ordine $(m-n)q$ e di grado q della forma f. Infatti questa espressione soddisferà le due equazioni:

$$\sum_1^n r \alpha_{r-1} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_r} = 0, \qquad \sum_0^n (n-r) \alpha_{r+1} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_r} = 0$$

analoghe alle (38); inoltre, essendo

$$\frac{\partial \psi}{\partial b_r} = \sum_0^n \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_s} \frac{\partial \alpha_s}{\partial b_r},$$

si avranno le

$$\sum_1^m r b_{r-1} \frac{\partial \psi}{\partial b_r} = \sum_0^n \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_s} \sum_1^m r b_{r-1} \frac{\partial \alpha_s}{\partial b_r}, \quad \sum_0^m (m-r) b_{r+1} \frac{\partial \psi}{\partial b_r} = \sum_0^n \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_s} \sum_0^m (m-r) b_{r+1} \frac{\partial \alpha_s}{\partial b_r};$$

ma

$$\sum_1^m r b_{r-1} \frac{\partial \alpha_s}{\partial b_r} = \frac{\partial^n [y f'(x)]}{\partial x^{n-s} \partial y^s}, \quad \sum_0^m (m-r) b_{r+1} \frac{\partial \alpha_s}{\partial b_r} = \frac{\partial^n [x f'(y)]}{\partial x^{n-s} \partial y^s},$$

ossia

$$\sum_1^m r b_{r-1} \frac{\partial \alpha_s}{\partial b_r} = s \alpha_{s-1} + y \frac{\partial \alpha_s}{\partial x}, \qquad \sum_0^m (m-r) b_{r+1} \frac{\partial \alpha_s}{\partial b_r} = (n-s) \alpha_{s+1} + x \frac{\partial \alpha_s}{\partial y};$$

dunque sostituendo:

$$\sum_1^m r b_{r-1} \frac{\partial \psi}{\partial b_r} = y \frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad \sum_0^m (m-r) b_{r+1} \frac{\partial \psi}{\partial b_r} = x \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

le quali equazioni dimostrano la proprietà enunciata.

Analogamente proverebbesi che, essendo $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ due covarianti della forma u d'ordini m ed s non $< m$, se nel primo di essi permutiamo le x, y nelle $y, -x$ ed in seguito poniamo ordinatamente in luogo di

$$x^m, \quad x^{m-1}y, \quad \dots$$

le

$$\frac{\partial^m \psi}{\partial y^m}, \quad \frac{\partial^m \psi}{\partial y^{m-1} \partial x}, \quad \dots$$

il risultato che ottiensi è un nuovo covariante od un invariante della forma u *). Notiamo che, se $s = m + 1$ il covariante dedotto in questo modo è *lineare*, per cui: *tutte le forme, le quali hanno covarianti di cui gli ordini differiscono dell'unità, hanno anche covarianti lineari.*

Applichiamo questo teorema alla ricerca della espressione generale degli invarianti cubici delle forme di grado $n \equiv 0$ (mod. 4). Il covariante φ sia la stessa forma u, ed il primo coefficiente del covariante ψ sia l'invariante quadratico della forma di grado $\frac{1}{2}n$. Sia

$$\psi(x, y) = (\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_s)(x, y)^s.$$

Per determinare il numero s osserviamo che, essendo quel covariante di secondo grado e di indice $\frac{1}{2}n$, si ha:

$$\frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(2n - s),$$

dalla quale $s = n$; quindi la espressione

$$a_0 \alpha_n - n a_1 \alpha_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} a_2 \alpha_{n-2} - \dots + a_n \alpha_0$$

è l'invariante cubico della forma u.

5. Se i coefficienti di un covariante o di un invariante della forma u sono espressi in funzione delle radici $x_1, x_2, \dots x_n$, supposte disuguali, dell'equazione $u(x, 1) = 0$, le equazioni caratteristiche pel covariante e per l'invariante si potranno determinare nel modo seguente. Essendo

$$(a_0, a_1, \dots a_n)(x, y)^n = a_0 (x - x_1 y)(x - x_2 y) \dots (x - x_n y),$$

e ponendo per brevità

$$p_r = \frac{n(n-1) \dots (n-r+1)}{1.\,2.\,3 \dots r},$$

---

*) Hermite, Sur la théorie des fonctions [illegible] (The Cambridge and Dublin Mathematical Journal, t. IX [illegible]).

si ha, come è noto,

$$p_r \frac{\partial a_r}{\partial x_s} = -(p_{r-1} a_{r-1} + p_{r-2} a_{r-2} x_s + \dots + p_1 a_1 x_s^{r-2} + a_0 x_s^{r-1}),$$

dalla quale, rammentando le relazioni Newtoniane fra le somme delle potenze delle radici ed i coefficienti, si deducono le formole:

$$\sum_1^n \frac{\partial a_r}{\partial x_s} = -r a_{r-1}, \quad \sum_1^n x_s \frac{\partial a_r}{\partial x_s} = r a_r, \quad \sum_1^n x_s^2 \frac{\partial a_r}{\partial x_s} = (n-r) a_{r+1} + a_r \sigma,$$

essendo $\sigma = x_1 + x_2 + \dots + x_n$. Quindi, indicando con λ una funzione qualunque delle $a_0, a_1, \dots a_n$ ed in conseguenza delle $x_1, x_2, \dots x_n$, si ottengono le

$$(40) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_1^n \frac{\partial \lambda}{\partial x_s} = -\sum_1^n r a_{r-1} \frac{\partial \lambda}{\partial a_r}, \quad \sum_1^n x_s \frac{\partial \lambda}{\partial x_s} = \sum_1^n r a_r \frac{\partial \lambda}{\partial a_r}, \\ \displaystyle\sum_1^n x_s^2 \frac{\partial \lambda}{\partial x_s} = \sigma \sum_1^n a_r \frac{\partial \lambda}{\partial a_r} + \sum_1^n (n-r) a_{r+1} \frac{\partial \lambda}{\partial a_r}. \end{cases}$$

Sia ora λ eguale ad un coefficiente c_s del covariante

$$\varphi(x, y) = (c_0, c_1, \dots c_m)(x, y)^m$$

della forma u; supponendo c_s espresso in funzione delle radici $x_1, x_2, \dots$, le equazioni (26), per le superiori, si trasformeranno nelle

$$(41) \quad \sum_1^n \frac{\partial c_s}{\partial x_i} = -s c_{s-1}, \quad \sum_1^n x_i^2 \frac{\partial c_s}{\partial x_i} = \sigma \sum_1^n a_r \frac{\partial c_s}{\partial a_r} - n a_1 \frac{\partial c_s}{\partial a_0} + (m-s) c_{s+1},$$

la seconda delle quali, essendo $a_0 \sigma + n a_1 = 0$ ed essendo per la (29)

$$\sum_0^n a_r \frac{\partial c_s}{\partial a_r} = p c_s,$$

riducesi alla

$$(42) \quad \sum_1^n x_i^2 \frac{\partial c_s}{\partial x_i} = p \sigma c_s + (m-s) c_{s+1};$$

inoltre dalla (30) si ha:

$$(43) \quad \sum_1^n x_i \frac{\partial c_s}{\partial x_i} = \frac{1}{2}(2s + np - m) c_s.$$

Quest'ultima equazione mostra essere $\frac{1}{2}(2s + np - m)$ il grado di c_s rispetto alle $x_1, x_2, \dots x_n$; inoltre, per una proprietà generale alle funzioni simmetriche, p è la

più alta potenza delle radici nelle funzioni simmetriche che compongono i valori di c_0, c_2, ... Quindi il primo coefficiente c_0 sarà una funzione delle radici di grado $\frac{1}{2}(np - m)$, nella quale le radici non saranno elevate ad esponenti maggiori di p e che dovrà soddisfare all'equazione

$$\sum_1 \frac{\partial c_0}{\partial x_i} = 0,$$

cioè dovrà essere una funzione delle differenze delle radici. La equazione (42) darà in seguito i valori di c_1, c_2, ... Dalle (27) per le formole superiori di trasformazione (40) si otterranno per un covariante qualunque φ le seguenti:

$$\sum_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} - y\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \qquad \sum x_r \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} - y\frac{\partial \varphi}{\partial y} = [illegible]\,\varphi,$$

e per un invariante ψ (n° 4) le

$$\sum_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_r} = 0, \qquad \sum x_r \frac{\partial \psi}{\partial x_r} = \frac{nq}{2}\psi,$$

quindi l'invariante ψ sarà una funzione delle radici di grado $\frac{1}{2}nq$, nella quale le radici non sieno elevate a potenze maggiori di q, e che soddisfi alla prima delle equazioni superiori, cioè sia una funzione delle differenze delle radici (Cap. I, n° 4).

Applicazione. — Consideriamo l'equazione ai quadrati delle differenze delle radici della $u(x, 1) = 0$, ed indichiamola con

$$x^\mu + b_1 x^{\mu-1} + \ldots + b_{\mu-1} x + b_\mu = 0 \qquad \left[\mu = \frac{n(n-1)}{2}\right].$$

È evidente che un coefficiente qualunque b_s è una funzione simmetrica delle radici del grado $2s$ che soddisfa all'equazione

$$\sum_1 \frac{\partial b_s}{\partial x_i} = 0,$$

e che le più alte potenze di quelle radici saranno ordinatamente $2, 4, \ldots 2(n-1)$ in b_1, b_2, ... b_{n-1}, e $2(n-1)$ per tutti gli altri coefficienti b_n, b_{n+1}, ... b_μ. Ne risulta: 1°) che fra quei coefficienti il solo b_μ è un invariante della forma u; 2°) che tutti gli altri coefficienti sono funzioni razionali, intere, di primi coefficienti di covarianti della forma u. Infatti, indicando con g il grado rispetto alle radici di uno qualunque dei coefficienti, e con ω la potenza più alta delle radici nel medesimo, dovrà essere:

(44) $$g = \frac{1}{2}n\omega, \quad \text{oppure} \quad g = \frac{1}{2}(n\omega - m)$$

(essendo m un numero intero) secondo che quel coefficiente è un invariante od il primo coefficiente di un covariante della forma u. Ora per un coefficiente b_s si hanno:

$$g = 2s, \qquad \omega = 2s \qquad\qquad (s = 0, 1, \ldots n - 1)$$

e quindi la prima delle equazioni (44) non può verificarsi che per $n = 2$, e la seconda dà

$$m = 2s(n - 2);$$

oppure

$$g = 2s, \qquad \omega = 2(n - 1) \qquad\qquad (s = n, n + 1, \ldots \mu)$$

ed in conseguenza la prima delle (44) è soddisfatta da $s = \mu$, e la seconda dà

$$m = 2[n(n - 1) - 2s].$$

Dunque i coefficienti $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$ saranno funzioni razionali, intere, di primi coefficienti di covarianti della forma u dei gradi $2, 4, \ldots 2(n - 1)$ e degli ordini $2(n - 2), 4(n - 2), \ldots 2(n - 1)(n - 2)$; ed i coefficienti $b_n, b_{n+1}, \ldots b_{\mu-1}$ funzioni razionali, intere, di primi coefficienti di covarianti della forma u, tutti del grado $2(n - 1)$ e degli ordini $2(n^2 - 3n)$, $2(n^2 - 3n - 2)$, $\ldots$ 8, 4. Il coefficiente b_μ sarà un invariante della forma u del grado $2(n - 1)$, cioè sarà il discriminante della forma stessa. Suppongasi $n = 4$, e posto

$$a = a_0, \qquad b = a_0 a_2 - a_1^2, \qquad c = a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3,$$

$$i = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2, \qquad j = a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 - a_2^3,$$

i, j sono, come mostreremo in seguito, i due soli invarianti indipendenti della forma biquadratica u, ed a, b, c sono i primi coefficienti degli unici covarianti indipendenti della forma stessa. È evidente che, combinando per prodotti quelle cinque quantità o le loro potenze, si otterranno delle espressioni le quali potranno essere i primi coefficienti di covarianti della forma biquadratica u, e che i gradi dei medesimi coefficienti verranno determinati dalla stabilita relazione fra l'indice e l'ordine (n° 2). Quindi i coefficienti $b_1, b_2, \ldots b_6$ dell'equazione ai quadrati delle differenze dell'equazione del quarto grado saranno funzioni lineari delle seguenti quantità:

$$b_1 \text{ di } b; \qquad b_2 \text{ di } b^2, a^2 i; \qquad b_3 \text{ di } b^3, a^2 b i, a^3 j, c^2;$$

$$b_4 \text{ di } b^2 i, a b j, a^2 i^2; \qquad b_5 \text{ di } b i^2, a i j; \qquad b_6 \text{ di } i^3, j^2;$$

ed osservando che si ha identicamente

$$c^2 = a^2 b i - 4 b^3 - a^3 j$$

il valore di b_3 potrà formarsi colle sole quantità b^3, $a^2 b i$, $a^3 j$. Determinando i coef-

ficienti numerici mediante la considerazione di equazioni biquadratiche particolari, ottengonsi facilmente i seguenti valori:

$$b_1 = \frac{48}{a^2} h,$$

$$b_2 = \frac{8}{a^4} (96 h^2 + a^2 i),$$

$$b_3 = \frac{16}{a^6} (256 h^3 + 32 a^2 h i - 26 a^3 j),$$

$$b_4 = \frac{16}{a^8} (384 h^2 i - 288 a h j - 7 a^2 i^2),$$

$$b_5 = \frac{64}{a^{10}}\, 18 i (2 h i - 3 a j),$$

$$b_6 = \frac{4^3}{a^{12}} (i^3 - 27 j^2).$$

CAP. IV. — Delle equazioni alle derivate, caratteristiche pel discriminante.

1. Abbiamo dimostrato al Cap. I, n° 4, che il discriminante di una forma binaria qualunque è un invariante della medesima; quindi il discriminante della forma di grado n dovrà soddisfare alle equazioni (38) caratteristiche per gli invarianti di quella forma. Ma nel caso del discriminante queste equazioni fanno parte di un gruppo di n equazioni alle derivate, le quali sono soddisfatte dal medesimo e che perciò denomineremo equazioni caratteristiche pel discriminante.

Rammentando le denominazioni introdotte al n° 5 del Cap. antecedente e le note relazioni Newtoniane fra le somme delle potenze delle radici ed i coefficienti, ponendo

$$\alpha_{m,s} = \alpha_{s,m} = \sum_{r}^{m-1} (r + s - 2 m) p_{r} p_{m+s-r} a_{r} a_{m+s-r} - (s - r + 1) p_{r} p_{s} a_{r} a_{s},$$

si otterrà facilmente la relazione:

$$- p_r p_s \sum_{1} \frac{\partial x}{\partial x_r} \frac{\partial x}{\partial x_s} = \alpha_{r,s}.$$

Sia ora λ una funzione qualsivoglia dei coefficienti a_0, a_1, ... e quindi delle radici x_1, x_2, ... dell'equazione $u(x, 1) = 0$. Essendo

$$\frac{\partial \lambda}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_s} + \frac{\partial \lambda}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_s} + \dots + \frac{\partial \lambda}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial x_s} = \frac{\partial \lambda}{\partial x_s},$$

si avrà:

$$(45) \qquad \frac{1}{p_1}\alpha_{m,1}\frac{\partial \lambda}{\partial a_1} + \frac{1}{p_2}\alpha_{m,2}\frac{\partial \lambda}{\partial a_2} + \dots + \frac{1}{p_n}\alpha_{m,n}\frac{\partial \lambda}{\partial a_n} = -p_m \sum_1^n \frac{\partial a_m}{\partial x_s}\frac{\partial \lambda}{\partial x_s}.$$

Suppongasi la funzione λ eguale al discriminante Δ della forma $u(x, y)$ dell'ennesimo grado, cioè sia

$$\lambda = \Delta = a_0^{2(n-1)}(x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 \dots (x_{n-1} - x_n)^2;$$

ponendo $u'(x) = \frac{du}{dx}$, $u''(x) = \frac{d^2 u}{dx^2}$, si avrà:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x_s} = \Delta \frac{u''(x_s)}{u'(x_s)};$$

od anche per la formola

$$-\frac{1}{p_r}\frac{\partial x_s}{\partial a_r} = \frac{x_s^{n-r}}{u'(x_s)}$$

sarà:

$$-\frac{\partial \Delta}{\partial x_s} = n(n-1)\Delta\left[\frac{1}{p_2}a_0\frac{\partial x_s}{\partial a_2} + \frac{(n-2)}{p_3}a_1\frac{\partial x_s}{\partial a_3} + \frac{(n-2)(n-3)}{1.\ 2\ p_4}a_2\frac{\partial x_s}{\partial a_4} + \dots + \frac{1}{p_n}a_{n-2}\frac{\partial x_s}{\partial a_n}\right].$$

Ora

$$\sum_1^n \frac{\partial a_r}{\partial x_s}\frac{\partial x_s}{\partial a_m} = 0, \qquad \sum_1^n \frac{\partial a_m}{\partial x_s}\frac{\partial x_s}{\partial a_m} = 1;$$

quindi:

$$-\sum_1^n \frac{\partial a_m}{\partial x_s}\frac{\partial \Delta}{\partial x_s} = (n - m + 2)(n - m + 1)\frac{p_{m-2}}{p_m}a_{m-2}\Delta,$$

e sostituendo nella (45):

$$(46) \qquad \sum_1^n \frac{1}{p_r}\alpha_{m,r}\frac{\partial \Delta}{\partial a_r} = (n - m + 2)(n - m + 1)p_{m-2}a_{m-2}\Delta.$$

In questa equazione la m potendo assumere i valori 1, 2, 3, ... n, si ottengono n equazioni alle quali deve soddisfare il discriminante. Le prime tre fra esse sono comuni cogli invarianti; per mezzo delle altre si potrà esprimere il discriminante della forma di grado n in funzione dei suoi invarianti. Se nella equazione (46) si pone

$m = 1$, si ottiene:

$$\sum_1^n \frac{1}{p_r}\alpha_{1,r}\frac{\partial\Delta}{\partial a_r} = -a_0\sum_1^n (n-r+1)\frac{p_{r-1}}{p_r}a_{r-1}\frac{\partial\Delta}{\partial a_r} = -a_0\sum_1^n r\,a_{r-1}\frac{\partial\Delta}{\partial a_r} = 0,$$

quindi la equazione (46) per $m = 2, 3, \ldots n$ si potrà porre sotto la forma più semplice:

$$(47)\qquad \sum_1^n \frac{1}{p_r}A_{m,r}\frac{\partial\Delta}{\partial a_r} = (n-m+2)(n-m+1)p_{m-2}a_{m-2}\Delta,$$

supposto

$$A_{m,r} = \sum_1^{m-1}(r+m-2s)p_{m-s}p_{r+s-2}\,a_{m-s}a_{r+s-2}.$$

Applicazione. — Considero la forma di quinto grado

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)(x, y)^5.$$

Ponendo per brevità:

$$A = 2(a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2),$$

$$B = a_0 a_5 - 3 a_1 a_4 + 2 a_2 a_3,$$

$$C = 2(a_1 a_5 - 4 a_2 a_4 + 3 a_3^2),$$

$$-6\alpha = a_0 C - 2 a_1 B + a_2 A,$$

$$-6\beta = a_1 C - 2 a_2 B + a_3 A,$$

$$-6\gamma = a_2 C - 2 a_3 B + a_4 A,$$

$$-6\delta = a_3 C - 2 a_4 B + a_5 A,$$

gli invarianti di quarto grado e di ottavo grado della medesima si ponno porre sotto la forma:

$$I_4 = AC - B^2,$$

$$I_8 = 9[A(\beta\delta - \gamma^2) + B(\beta\gamma - \alpha\delta) + C(\alpha\gamma - \beta^2)].$$

Ora, operando su questi invarianti col simbolo (47), nel quale facciasi $m = 4$, si ottengono le relazioni:

$$\sum_1^5 \frac{1}{p_r}A_{4,r}\frac{\partial I_4}{\partial a_r} = 30 a_2 I_4 + 48(A\gamma - 2B\beta + C\alpha),$$

$$\sum_1^5 \frac{1}{p_r}A_{4,r}\frac{\partial I_8}{\partial a_r} = 60 a_2 I_8 + \frac{3}{4} I_4(A\gamma - 2B\beta + C\alpha);$$

quindi, ponendo

$$\Delta = I_4^2 + b I_8 ,$$

si avrà:

$$\sum_1 \frac{1}{r} A_{4,r} \frac{\partial \Delta}{\partial a_r} = 60 a_2 (I_4^2 + b I_8) + (A\gamma - 2B\beta + C\alpha)\left(96 + \frac{3}{4} b\right);$$

ma, per la (47) dovendo essere nullo l'ultimo termine del secondo membro, risulterà $b = -128$, per cui:

$$\Delta = I_4^2 - 128 I_8 .$$

2. Sia $\psi(x, y) = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_s)(x, y)^s$ un covariante della forma dell'ennesimo grado, ed indicando con P_m il simbolo di operazione

$$\sum_1^n \frac{1}{r} A_{m,r} \frac{\partial}{\partial a_r},$$

suppongansi:

$$(48) \quad \begin{cases} P_m(\alpha_0) = \lambda_m a_{m-2} \alpha_0 + q_m s a_{m-3} \alpha_1 , \\ P_m(\alpha_s) = p_m s a_{m-1} \alpha_{s-1} + (s\mu_m + \lambda_m) a_{m-2} \alpha_s , \\ P_m(\alpha_r) = p_m r a_{m-1} \alpha_{r-1} + (r\mu_m + \lambda_m) a_{m-2} \alpha_r + q_m (s-r) a_{m-3} \alpha_{r+1} \end{cases}$$

per $r = 2, 3, \ldots s - 1$. Le p_m, q_m, λ_m, μ_m sono coefficienti numerici.

Rappresenti $\varphi(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_s)$ un invariante di grado k della forma $\psi(x, y)$; essendo

$$P_m(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_0} P_m(\alpha_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} P_m(\alpha_1) + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_s} P_m(\alpha_s),$$

si otterrà, pei valori superiori,

$$P_m(\varphi) = \frac{k}{2} (s\mu_m + 2\lambda_m) a_{m-2} \varphi ;$$

quindi rammentando l'equazione (47), se

$$(49) \qquad \frac{k}{2} (s\mu_m + 2\lambda_m) = \rho (n - m + 2)(n - m + 1) p_{m-2} ,$$

sarà

$$\varphi = \varepsilon \Delta^\rho ,$$

ε, ρ coefficienti numerici.

Esempio. — Sia $n = 4$, $m = 4$, ed indicando con v l'Hessiano della forma u (Cap. II, n° 3) si supponga:

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial [\text{illegible}]}{\partial x} & \frac{\partial [\text{illegible}]}{\partial y} \end{vmatrix};$$

sarà $s = 6$, e l'equazione (49) diverrà:

$$4(3\mu_1 + \lambda_1) = 12\rho.$$

Ora, formando le (48) si trovano in questo caso i valori: $p = q = 1$, $\lambda_1 = [\text{illegible}]$, $\mu_1 = 3$; quindi $k = 2\rho$; cioè: *gli [illegible] potenze del discriminante della forma di quarto grado* *).

3. Aggiungiamo una seconda applicazione della formola generale (45). Ponendo $\lambda = x_s$ si ottiene:

$$\sum_1^{[\text{illegible}]} \frac{1}{p_r} \alpha [\text{illegible}] \frac{\partial [\text{illegible}]}{\partial a_r} = [\text{illegible}] + [\text{illegible}] + \ldots + [\text{illegible}],$$

e da essa deduconsi n equazioni alle derivate, alle quali deve soddisfare ciascuna delle radici dell'equazione $u(x, 1) = 0$.

CAP. V. — Dei covarianti e degli invarianti non legati fra loro da relazioni lineari.

1. Eulero, nelle sue ricerche sulla partizione dei numeri **), ha dimostrato che il numero dei modi, in cui un numero s può esser formato da una somma di r termini della serie 0, 1, 2, ... n (supponendo che ciascun elemento possa essere ripetuto un indefinito numero di volte), è eguale al coefficiente di $x^s z^r$ nello sviluppo della espressione

$$Z = \frac{1}{(1-z)(1-xz)(1-x^2z)\ldots(1-x^nz)}.$$

Supponiamo

$$Z = 1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots$$

---

*) Hermite, *Sur la [illegible]* [illegible] Mémoire. Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LII [illegible], p. [illegible]

**) *Introductio in Analysin infinitorum*, Cap XVI.

Cambiando la z in xz si ha:

$$(1-z)Z=(1-x^{n+1}z)(1+A_1xz+A_2x^2z^2+\ldots),$$

e dal confronto dei coefficienti delle potenze di z:

$$A_r(1-x^r)=A_{r-1}(1-x^{n+r}),$$

dalla quale:

$$(50)\qquad A_r=\frac{(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})\ldots(1-x^{n+r})}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^r)}.$$

Se quindi col simbolo $P(s, r, n)$ indichiamo il numero dei termini di una funzione omogenea del grado r, omogenea in indice dell'ordine s, e formata cogli elementi $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$, si avrà evidentemente:

$$(51)\quad P(s,r,n)=\text{coefficiente di } x^s \text{ nello sviluppo di } \frac{(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})\ldots(1-x^{n+r})}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^r)}.$$

2. La espressione del secondo membro dell'equazione (50) non cambia di valore permutando gli esponenti r, n; cioè, indicando quella espressione con $\psi(x)$, si ha:

$$\psi(x)=\frac{(1-x^{r+1})(1-x^{r+2})\ldots(1-x^{r+n})}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^n)};$$

inoltre, la funzione $\psi(x)$ soddisfa all'equazione:

$$x^{nr}\psi\left(\frac{1}{x}\right)=\psi(x);$$

quindi si hanno per la funzione $P(s, r, n)$ le seguenti proprietà:

$$(52)\qquad P(s,r,n)=P(s,n,r),$$

$$(53)\qquad P(s,r,n)=P(nr-s,r,n),$$

alle quali possiamo aggiungere la

$$(54)\qquad P(s,r,n)=0,\quad \text{per}\quad s>rn.$$

Un'altra interessante proprietà della stessa funzione ottiensi osservando che

$$x^r\psi(x)=\frac{(1-x^{n+2})(1-x^{n+3})\ldots(1-x^{n+r+1})}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^r)}-\frac{(1-x^{n+2})(1-x^{n+3})\ldots(1-x^{n+r})}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{r-1})},$$

per cui:

$$P(s,r,n)=P(s+r,r,n+1)-P(s+r,r-1,n+1),$$

caso contrario, e poniamo nella formola superiore $s = \frac{1}{2}(nr - p)$, si avrà:

$$(58)\quad \begin{cases} P\left[\frac{1}{2}(nr-p),\ r,\ n\right] = \sum_0^r {}^m (-1)^m \times \text{coefficiente di } x^{n\gamma} \text{ in} \\ \dfrac{x^\rho}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^m)} \cdot \dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^{r-m})}, \end{cases}$$

essendo

$$\gamma = \tfrac{1}{2}(r - 2m), \qquad \rho = \tfrac{1}{2}[p + m(m+1)].$$

Ora è evidente che i termini della sommatoria del secondo membro corrispondenti a valori di m pei quali risulta $n\gamma - \rho < 0$ sono eguali a zero; quindi la sommatoria medesima potrà estendersi pel caso di r pari da $m = 0$ ad $m = \frac{1}{2}r - 1$, e pel caso di r dispari da $m = 0$ ad $m = \frac{1}{2}(r-1)$.

3. Supponiamo r pari e poniamo per brevità:

$$F(x) = (1-x)\dots(1-x^m).(1-x)\dots(1-x^{r-m});$$

si avrà:

$$P\left[\tfrac{1}{2}(nr-p),\ r,\ n\right] = \sum_0^{\frac{1}{2}r-1} {}^m (-1)^m \times \text{coefficiente di } x^{n\gamma} \text{ in } \frac{x^\rho}{F(x)}.$$

Rappresentiamo con $1 - x^a$, $1 - x^b$, $1 - x^c$, ... i fattori di $F(x)$, e siano $a_1, b_1, c_1, \dots$ i minimi multipli comuni ai numeri $a, b, c, \dots$ ed al numero γ; si avrà:

$$(59)\qquad \frac{(1-x^{a_1})(1-x^{b_1})(1-x^{c_1})\dots}{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\dots} = \varphi(x),$$

essendo $\varphi(x)$ una funzione intera di x. Ossia, ponendo

$$f(x) = (1-x^{a_1})(1-x^{b_1})(1-x^{c_1})\dots$$

sarà

$$\frac{1}{F(x)} = \frac{\varphi(x)}{f(x)},$$

e

$$P\left[\tfrac{1}{2}(nr-p),\ r,\ n\right] = \sum_0^{\frac{1}{2}r-1} (-1)^m \times \text{coefficiente di } x^{n\gamma} \text{ in } \frac{x^\rho\varphi(x)}{f(x)}.$$

Ora gli esponenti di x nel polinomio $f(x)$ sono evidentemente multipli di γ; quindi nel polinomio $x^\rho\varphi(x)$ si potranno trascurare quei termini nei quali l'esponente della x non è un multiplo di γ, giacchè i medesimi non influiscono sul valore del coefficiente di $x^{n\gamma}$. Indicando con $\lambda(x^\gamma)$ il polinomio risultante dal trascurare quei termini, e po-

nendo $f(x) = \mu(x^{\nu})$, si avrà:

$$P\left[\tfrac{1}{2}(nr - p),\, r,\, n\right] = \sum_{1}^{\frac{1}{2}r-1} (-1)^{\nu} \times \text{coefficiente di } x^{m} \text{ in } \frac{\lambda(x^{\nu})}{\mu(x^{\nu})},$$

ossia

$$P\left[\tfrac{1}{2}(nr - p),\, r,\, n\right] = \sum_{1}^{\frac{1}{2}r-1} (-1)^{\nu} \times \text{coefficiente di } x^{m\nu} \text{ in } \frac{\lambda(x)}{\mu(x)},$$

od anche

$$P\left[\tfrac{1}{2}(nr - p),\, r,\, n\right] = \text{coefficiente di } x^{m} \text{ in } \sum_{1}^{\frac{1}{2}r-1} (-1)^{\nu} \frac{\lambda(x)}{\mu(x)}.$$

Se r è dispari, ponendo x^2 in luogo di x nel secondo membro dell'equazione (58), si potrà anche in questo caso applicare la trasformazione superiore, e si giungerà alla

$$P\left[\tfrac{1}{2}(nr - p),\, r,\, n\right] = \text{coefficiente di } x^{m} \text{ in } \sum_{1}^{r-1} (-1)^{\nu} \frac{\lambda_1(x)}{\mu_1(x)},$$

nella quale $\lambda_1(x)$, $\mu_1(x)$ sono due funzioni intere di x. Quindi, tanto per r pari, quanto per r dispari, si avrà l'equazione:

$$P\left[\tfrac{1}{2}(nr - p),\, r,\, n\right] = \text{coefficiente di } x^{m} \text{ in } \frac{u(x)}{v(x)},$$

essendo $u(x)$ una funzione intera di x, e $v(x)$ il prodotto di fattori della forma $1 - x^{\theta}$ *).

Esempio. — Sieno $r = 4$, $p = 2$; l'equazione (58) darà

$$P\left[\tfrac{1}{2}(4n - 2),\, 4,\, n\right] = \text{coefficiente di } x^{2n} \text{ in } \frac{x}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

$$- \text{coefficiente di } x^{2n} \text{ in } \frac{x^2}{(1-x)^2(1-x^2)(1-x^4)}.$$

Per ridurre la prima frazione osserviamo che, essendo ordinatamente 2, 2, 6, 4 i minimi multipli comuni ai numeri 1, 2, 3, 4 ed al numero 2, si ha:

$$\frac{(1-x^2)^2(1-x^6)(1-x^4)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} = \frac{(1-x^2)(1-x^6)}{(1-x)(1-x^3)} = 1 + x + x^3 + x^4,$$

quindi la prima frazione equivale alla

$$\frac{x(1 + x + x^3 + x^4)}{(1-x^2)^2(1-x^6)(1-x^4)};$$

*) Cayley, *Researches on the Partition of Numbers* (Philosophical Transactions, t. 146, p. 127) [illegible].

e, trascurando i termini del numeratore nei quali gli esponenti della x non sono multipli di due, si giungerà alla

$$P(2n-1, 4, n) = \text{coefficiente di } x^n \text{ in } \frac{x + x^2}{(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)}$$

$$- \text{coefficiente di } x^n \text{ in } \frac{x^2}{(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)},$$

o riducendo:

$$P(2n-1, 4, n) = \text{coefficiente di } x^n \text{ in } \frac{x}{(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)}.$$

4. La espressione $\varphi(x)$ [equazione (59)] si può ottenere nel seguente modo. Posto

$$(60) \qquad \varphi(x) = \frac{(1-x^{a_1})(1-x^{b_1})\dots}{(1-x^a)(1-x^b)\dots} = 1 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_i x^i,$$

si indichino con α, β, γ, ... le radici dell'equazione

$$(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\dots = 0$$

e con α_1, β_1, γ_1, ... quelle della

$$(1-x^{a_1})(1-x^{b_1})(1-x^{c_1})\dots = 0;$$

ora, indicando con s_m la espressione

$$\frac{1}{\alpha_1^m} + \frac{1}{\beta_1^m} + \frac{1}{\gamma_1^m} + \dots - \frac{1}{\alpha^m} - \frac{1}{\beta^m} - \frac{1}{\gamma^m} - \dots,$$

si ha facilmente:

$$-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = s_1 + s_2 x + s_3 x^2 + s_4 x^3 + \dots,$$

quindi, deducendosi dalla (60) la

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \dots}{1 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots},$$

si avranno le seguenti relazioni:

$$(61) \qquad \begin{cases} C_1 + s_1 = 0, \\ 2C_2 + C_1 s_1 + s_2 = 0, \\ 3C_3 + C_2 s_1 + C_1 s_2 + s_3 = 0, \\ 4C_4 + C_3 s_1 + C_2 s_2 + C_1 s_3 + s_4 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

5. Supponiamo che la funzione omogenea del grado r, omogenea in indice dell'ordine s e formata cogli elementi $a_0, a_1, \ldots a_n$, debba soddisfare all'equazione

$$(62) \qquad a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2 a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + 3 a_2 \frac{\partial}{\partial a_3} + \ldots + n a_{n-1} \frac{\partial}{\partial a_n} = 0.$$

Operando col primo membro della equazione superiore sulla funzione data, ottiensi evidentemente una funzione delle $a_0, a_1, \ldots a_n$ omogenea di grado r, di indice $s - 1$, e quindi composta di un numero $P(s-1, r, n)$ di termini. Mediante l'equazione superiore si potrà in conseguenza determinare un numero $P(s-1, r, n)$ di coefficienti numerici della funzione proposta, e sarà

$$Q(s, r, n) = P(s, r, n) - P(s-1, r, n)$$

il numero dei coefficienti indeterminati della medesima. Se a questi coefficienti indeterminati si dànno dei valori arbitrarj, si potranno ottenere moltissime forme differenti fra loro, ma di queste non saranno *indipendenti* che un numero $Q(s, r, n)$, essendo le altre legate ad esse per mezzo di equazioni lineari a coefficienti numerici.

Dunque il numero delle forme composte dagli elementi $a_0, a_1, \ldots a_n$, di grado r e di indice s, le quali soddisfano all'equazione (62), e sono indipendenti, cioè non legate da relazioni lineari, è $Q(s, r, n)$. *) Ora per la equazione (51) si ha:

$$Q(s, r, n) = \text{coefficiente di } x^s \text{ nello sviluppo di } \frac{(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})\ldots(1-x^{n+r})}{(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^r)};$$

quindi analogamente alle equazioni (52), (53), (55) si hanno le

$$(63) \quad \begin{cases} Q(s, r, n) = Q(s, n, r), \qquad Q(s, r, n) = -Q(nr - s + 1, r, n) \\ Q(s, r, n) = \sum_0^r Q(s - m, m, n - 1), \end{cases}$$

ed analogamente alla (58):

$$(64) \quad \begin{cases} Q\left[\tfrac{1}{2}(nr - p), r, n\right] = \sum_0^m (-1)^m \times \text{coefficiente di } x^{p} \text{ in} \\ \dfrac{x^{[illegible]}}{(1-x^m)(1-x^{m-1})\ldots(1-x)} \cdot \dfrac{1}{(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^{r-m})}. \end{cases}$$

Operando come al n° 3 per la funzione P si giungerà alla

$$Q\left[\tfrac{1}{2}(nr - p), r, n\right] = \text{coefficiente di } x^p \text{ in } \frac{U(x)}{V(x)},$$

*) CAYLEY: *A Second Memoir upon Quantics* [Philosophical Transactions, a. 1856, p. 101].

nella quale $U(x)$ è una funzione intera di x, e $V(x)$ il prodotto di fattori della forma $1 - x^{\eta}$.

6. Rammentando (Cap. I, n.° 1; Cap. III, [illegible]) [illegible] grado r delle $a_0, a_1, a_2, \dots a_n$, la quale sia omogenea in indice dell'ordine $\frac{1}{2} nr$ e soddisfi all'equazione (62), è un invariante della forma dell'ennesimo grado, è chiaro che la espressione $Q\left(\frac{1}{2} nr, r, n\right)$ determinerà per quella forma il numero degli invarianti indipendenti del grado r. Così, siccome una funzione omogenea di grado r delle $a_0, a_1, \dots a_n$, la quale [illegible] equazione (62), è il primo coefficiente di un covariante dell'ordine p della forma dell'ennesimo grado, la espressione Q [illegible] numero dei covarianti indipendenti di grado r e di ordine p. Quindi, se nr è pari, il numero totale degli invarianti e dei covarianti indipendenti di grado r della forma dell'ennesimo grado sarà

$$Q\left(\tfrac{1}{2} nr, r, n\right) + Q\left[\tfrac{1}{2}(nr - 2), \dots\right] + Q\left[\tfrac{1}{2}(nr - 4), \dots\right] + \dots$$
$$+ Q(1, r, n) = P(\dots, r, n) \text{ [illegible]};$$

e, nel caso di nr dispari, il numero totale dei covarianti indipendenti di grado r della forma stessa sarà

$$Q\left[\tfrac{1}{2}(nr-1), r, n\right] + Q\left[\tfrac{1}{2}(nr-3), \dots\right] + \dots + Q(\dots) = P\left[\tfrac{1}{2}(nr-1), r, n\right]. \text{ [illegible]}$$

Osserviamo che, essendo (63)

$$Q\left[\tfrac{1}{2}(nr - p), r, n\right] = Q\left[\tfrac{1}{2}(nr - p), n, r\right], \text{ [illegible]}$$

la espressione $Q\left[\frac{1}{2}(nr - p), r, n\right]$ rappresenterà tanto il numero dei covarianti indipendenti di grado r e di ordine p della forma dell'ennesimo grado, quanto quello dei covarianti indipendenti di grado n e di ordine p della forma dell'erresimo grado. Talchè può dirsi che: *ad ogni covariante d'ordine p e di grado r della forma di grado n corrisponde un covariante d'ordine p e di grado n della forma di grado r.* Questa proprietà dei covarianti, la quale vale evidentemente anche per gli invarianti, viene denominata *legge di reciprocità*.

7. Le Tabelle **A**, **B**, **C**, ... **P** seguenti furono calcolate coi metodi esposti ai n[i] 2, 3, 4.

Dalla Tabella **A**, essendo

$$Q(n,\ 2,\ n) = \text{coefficiente di } x^n \text{ in } 1 + x^2 + x^4 + \ldots,$$

deducesi che tutte le forme di grado pari hanno uno, ed un solo, invariante quadratico (Cap. I, n° 4). Dalla stessa Tabella essendo

$$Q(n,\ 3,\ n) = \text{coefficiente di } x^n \text{ in } 1 + x^4 + x^8 + \ldots,$$

si ha che: *le sole forme di grado* $\equiv 0$ (mod. 4) *hanno un invariante cubico;* quindi per la legge di reciprocità la forma cubica avrà un invariante di quarto grado (il discriminante di quella forma), uno di grado ottavo (il quadrato del discriminante), ecc.

Dalla Tabella **B** si ha:

$$Q(n-1,\ 2,\ n) = \text{coefficiente di } x^n \text{ in } x + x^3 + x^5 + x^7 + \ldots;$$

quindi: *tutte le forme di grado dispari avranno uno, ed un solo, covariante di secondo grado e di secondo ordine.* Così, per la medesima Tabella essendo

$$Q\left[\tfrac{1}{2}(3n-2),\ 3,\ n\right] = \text{coefficiente di } x^n \text{ in } x^2(1 + x^4 + x^8 + \ldots),$$

$$Q(2n-1,\ 4,\ n) = 0,$$

deducesi che: *le sole forme di grado* $\equiv 2$ (mod. 4) *hanno un covariante di terzo grado e di secondo ordine, e che nessuna forma binaria ha covariante di quarto grado e di secondo ordine.*

Dalla Tabella **C** si avrà che: *tutte le forme di grado pari hanno uno, ed un solo, covariante di secondo grado e di quarto ordine;* che: *le sole forme di grado* $\equiv 0$ (mod. 4) *hanno un covariante di terzo grado e di quarto ordine;* e che: *le forme dei gradi* $3m$, $3m-1$, $3m-2$ *hanno ciascuna* m *covarianti di quarto grado e di quarto ordine.*

Dalla Tabella **G**, essendo

$$Q\left[\tfrac{1}{2}(3n-1),\ 3,\ n\right] = 0,$$

deducesi che: *nessuna forma può avere covariante lineare e di terzo grado;* e, reciprocamente, che la forma cubica non ha covariante lineare.

Da ultimo, dalle Tabelle **N**, **P** si ha che: *il numero totale degli invarianti e dei covarianti di secondo grado per le forme dei gradi* $2m$, $2m+1$ è $m+1$; e che: il *numero totale dei covarianti di terzo grado per una forma di grado* $2m+1$ è

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2}.$$

Tabella G.

$Q\left[\frac{1}{2}(nr-1),\ r,\ n\right]=$ coefficiente di x^n in $G(r)=$ coefficiente di x^r in $G(n)$:

$$G(3)=0\,,$$

$$G(5)=\frac{x^5}{(1-x^2)(1-x^6)(1-x^8)}\,.$$

Tabella H.

$Q\left[\frac{1}{2}(nr-3),\ r,\ n\right]=$ coefficiente di x^n in $H(r)=$ coefficiente di x^r in $H(n)$:

$$H(3)=\frac{x}{1-x^2}=x(1+x^2+x^4+\ldots),$$

$$H(5)=\frac{x^3}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)}\,.$$

Tabella K.

$Q\left[\frac{1}{2}(nr-5),\ r,\ n\right]=$ coefficiente di x^n in $K(r)=$ coefficiente di x^r in $K(n)$:

$$K(3)=\frac{x^3}{1-x^2}=x^3(1+x^2+x^4+\ldots)\,,$$

$$K(5)=\frac{x(1-x^{12})}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)}\,.$$

Tabella P.

$$P\left[\tfrac{1}{2}(nr-1),\, r,\, n\right] = \text{coefficiente di } x^n \text{ in } P(r) = \text{coefficiente di } x^r \text{ in } P(n):$$

$$P(3) = \frac{x}{(1-x)^3} = x\left[1 + 3x^2 + 6x^4 + 10x^6 + \ldots + \frac{(m+1)(m+2)}{2}x^{2m} + \ldots\right],$$

$$P(5) = \frac{x(1 + 4x^2 + 8x^4 + 10x^6 + 10x^8 + 8x^{10} + 4x^{12} + x^{14})}{(1-x^2)^2(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)}.$$

CAP. VI. — Dei covarianti e degli invarianti irreducibili.

1. Un covariante od un invariante di una data forma dicesi *irreducibile* allorquando sia impossibile l'esprimere il medesimo in funzione razionale, intera, di altri covarianti ed invarianti della forma stessa.

Considerando la forma dell'ennesimo grado, sieno per la medesima C_1, C_2, ... i numeri di tutti i covarianti indipendenti dei gradi primo, secondo, ecc., e γ_1, γ_2, ... i numeri di tutti i covarianti irreducibili dei gradi primo, secondo, ecc., qualunque sia l'ordine dei medesimi, e quindi compresivi gli invarianti. Denomineremo con X_1, Y_1, Z_1, ... i γ_1 covarianti irreducibili di primo grado; con X_2, Y_2, Z_2, ... i γ_2 covarianti irreducibili del secondo grado; ecc. È evidente che i C_1 covarianti indipendenti di primo grado sono tutti covarianti irreducibili, giacchè se uno di essi potesse esprimersi in funzione razionale, intera, di altri, la relazione non potrebbe essere che lineare, ed in questo caso quel covariante non potrebbe essere indipendente, il che abbiamo supposto aver luogo per tutti i C_1 covarianti. Quindi si avrà:

$$\gamma_1 = C_1. \tag{65}$$

Combinando due a due i γ_1 covarianti irreducibili di primo grado X_1, Y_1, ... si otterranno $\frac{1}{2}\gamma_1(\gamma_1+1)$ covarianti composti di secondo grado X_1^2, Y_1^2, ... $X_1 Y_1$, ..., dei quali, in generale, alcuni saranno indipendenti, altri legati da relazioni lineari. Sia μ_2 il numero degli indipendenti, e si abbiano le ν_2 relazioni lineari:

$$A_2 = h_1 X_1^2 + k_1 Y_1^2 + l_1 X_1 Y_1 + \ldots = 0,$$

$$B_2 = h_2 X_1^2 + k_2 Y_1^2 + l_2 X_2 Y_2 + \ldots = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

si avrà:

$$\frac{1}{2}\gamma_1(\gamma_1 + 1) = \mu_2 + \nu_2\,,$$

ed evidentemente:

$$\gamma_2 = C_2 - \mu_2\,,$$

dalle quali:

$$(66)\qquad \gamma_2 - \nu_2 = C_2 - \frac{1}{2}\gamma_1(\gamma_1 + 1).$$

Combinando fra loro tre a tre i γ_1 covarianti irreducibili di primo grado, si ottengono i covarianti composti del terzo grado X_1^3, Y_1^3, $X_1^2 Y_1$, ... in numero

$$\frac{1}{2\cdot 3}\gamma_1(\gamma_1 + 1)(\gamma_1 + 2);$$

e combinando i γ_1 covarianti irreducibili del primo grado, coi γ_2 del secondo grado, si hanno i covarianti composti del terzo grado $X_1 X_2$, $X_1 Y_2$, $X_2 Y_1$, ... in numero $\gamma_1 \gamma_2$; quindi il numero totale dei covarianti composti di terzo grado sarà

$$\frac{1}{2\cdot 3}\gamma_1(\gamma_1 + 1)(\gamma_1 + 2) + \gamma_1\gamma_2\,.$$

Fra questi covarianti composti sussistono necessariamente alcune relazioni lineari, le quali sono conseguenze delle $A_2 = 0$, $B_2 = 0$, ... , cioè le

$$X_1 A_2 = 0\,,\qquad X_1 B_2 = 0\,,\qquad \ldots$$

evidentemente in numero $\gamma_1 \nu_2$; quindi, supponendo che dei medesimi covarianti composti un numero μ_3 sieno indipendenti e si abbiano le ν_3 nuove relazioni lineari:

$$A_3 = a_3 X_1^3 + b_3 X_1^2 Y_1 + c_3 Y_1^3 + d_3 X_1 X_2 + \ldots = 0\,,$$

$$B_3 = a_3 X_1^3 + b_3 X_1^2 Y_1 + c_3 Y_1^3 + d_3 X_1 X_2 + \ldots = 0\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,,$$

si avrà:

$$\frac{1}{2\cdot 3}\gamma_1(\gamma_1 + 1)(\gamma_1 + 2) + \gamma_1\gamma_2 = \mu_3 + \nu_3 + \gamma_1\nu_2$$

e

$$\gamma_3 = C_3 - \mu_3\,;$$

e sostituendo:

$$(67)\qquad \gamma_3 - \nu_3 = C_3 - \frac{1}{2\cdot 3}\gamma_1(\gamma_1 + 1)(\gamma_1 + 2) - \gamma_1(\gamma_2 - \nu_2).$$

Combinando fra loro quattro a quattro: i γ_1 covarianti irreducibili del primo grado; i γ_2 covarianti irreducibili del secondo grado cogli $\frac{1}{2}\gamma_1(\gamma_1 + 1)$ covarianti composti del secondo grado; i γ_2 covarianti irreducibili del secondo grado a due a due; ed i γ_1 covarianti irreducibili del primo grado ai γ_3 covarianti irreducibili del terzo grado; si ha

il seguente numero di covarianti composti del quarto grado:

$$\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\gamma_1(\gamma_1+1)(\gamma_1+2)(\gamma_1+3)+\frac{1}{2}\gamma_2\gamma_1(\gamma_1+1)+\frac{1}{2}\gamma_2(\gamma_2+1)+\gamma_1\gamma_3.$$

Fra questi si hanno delle relazioni lineari dipendenti dalle ν_2, ν_3 relazioni lineari sussistenti fra i covarianti composti di secondo e di terzo grado; evidentemente esse sono: le $\frac{1}{2}\nu_2\gamma_1(\gamma_1+1)$:

$$(68)\qquad X_1^2 A_2=0,\quad Y_1^2 A_2=0,\quad X_1 Y_1 A_2=0,\quad \ldots\quad X_1^2 B_2=0,\quad \ldots,$$

le $\gamma_2\nu_2$:

$$X_2 A_2=0,\quad Y_2 A_2=0,\quad \ldots\quad X_2 B_2=0,\quad \ldots,$$

e le $\gamma_1\nu_3$:

$$X_1 A_3=0,\quad Y_1 A_3=0,\quad \ldots\quad X_1 B_3=0,\quad \ldots.$$

Notiamo che le $\frac{1}{2}\nu_2\gamma_1(\gamma_1+1)$ relazioni (68) non sono però tutte indipendenti; infatti, se si indicano con

$$A'=0,\quad A''=0,\quad A'''=0,\quad \ldots\quad B'=0,\quad B''=0,\quad B'''=0,\quad \ldots$$

quelle equazioni, si ha facilmente che l'equazione identica

$$A_2 B_2 - A_2 B_2 = 0$$

può scriversi:

$$h_1 B' + k_1 B'' + l_1 B''' + \ldots - h_2 A' - k_2 A'' - l_2 A''' - \ldots = 0,$$

ed analogamente per altre combinazioni a due a due delle ν_2 relazioni $A_2=0$, $B_2=0$, ..., per cui le relazioni (68) si ridurranno ad un numero

$$\frac{1}{2}\nu_2\gamma_1(\gamma_1+1)-\frac{1}{2}\nu_2(\nu_2-1).$$

Quindi il numero delle relazioni lineari, necessariamente sussistenti fra i covarianti composti del quarto grado, sarà:

$$\frac{1}{2}\nu_2\gamma_1(\gamma_1+1)-\frac{1}{2}\nu_2(\nu_2-1)+\gamma_2\nu_2+\gamma_1\nu_3,$$

ed indicando con μ_4 il numero degli indipendenti, e con ν_4 quello delle nuove relazioni lineari:

$$A_4 = p_1 X_1^4 + q_1 X_1^3 Y_1 + r_1 X_1^2 X_2 + s_1 X_2^2 + t_1 X_1 X_3 + \ldots = 0,$$

$$B_4 = p_2 X_1^4 + q_2 X_1^3 Y_1 + r_2 X_1^2 X_2 + s_2 X_2^2 + t_2 X_1 X_3 + \ldots = 0,$$

. . . . ,

si avranno le

$$\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\gamma_1(\gamma_1+1)(\gamma_1+2)(\gamma_1+3)+\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2(\gamma_1+1)+\frac{1}{2}\gamma_2(\gamma_2+1)+\gamma_1\gamma_3$$

$$=\mu_4+\nu_4+\frac{1}{2}\nu_2\gamma_1(\gamma_1+1)-\frac{1}{2}\nu_2(\nu_2-1)+\gamma_1\nu_3+\gamma_2\nu_2,$$

$$\gamma_4=C_4-\mu_4,$$

o sostituendo:

$$(69)\quad\left\{\begin{aligned}\gamma_4-\nu_4=C_4&-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\gamma_1(\gamma_1+1)(\gamma_1+2)(\gamma_1+3)-\frac{1}{2}\gamma_1(\gamma_1+1)(\gamma_2-\nu_2)\\&-\frac{1}{2}(\gamma_2-\nu_2)(\gamma_2-\nu_2+1)-\gamma_1(\gamma_3-\nu_3).\end{aligned}\right.$$

Combinando opportunamente i covarianti irreducibili dei gradi primo, secondo, terzo, quarto, si ottiene il seguente numero di covarianti composti del quinto grado:

$$\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\gamma_1(\gamma_1+1)(\gamma_1+2)(\gamma_1+3)(\gamma_1+4)+\frac{1}{2\cdot 3}\gamma_2\gamma_1(\gamma_1+1)(\gamma_1+2)$$

$$+\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2(\gamma_2+1)+\frac{1}{2}\gamma_3\gamma_1(\gamma_1+1)+\gamma_2\gamma_3+\gamma_1\gamma_4,$$

fra i quali necessariamente devono sussistere alcune relazioni lineari conseguenze delle ν_2, ν_3, ν_4 superiori; cioè le $\frac{1}{2\cdot 3}\nu_2\gamma_1(\gamma_1+1)(\gamma_1+2)$:

$$(70)\qquad Y_1^3A_2=0,\qquad X_1B_2=0,\;\ldots\; X_1Y_1A_2=0,\;\ldots,$$

le $\gamma_1\gamma_2\nu_2$:

$$(71)\qquad X_1X_2A_2=0,\quad X_1Y_2A_2=0,\;\ldots\; X_1X_2B_2=0,\;\ldots,$$

le $\frac{1}{2}\nu_3\gamma_1(\gamma_1+1)$:

$$(72)\qquad X_1^2A_3=0,\qquad Y_1^2A_3=0,\;\ldots\; X_1Y_1B_3=0,\;\ldots,$$

le $\gamma_2\nu_3+\gamma_3\nu_2$:

$$X_2A_3=0,\qquad Y_2A_3=0,\;\ldots\qquad X_2B_3=0,\;\ldots,$$

$$X_3A_2=0,\qquad Y_3A_2=0,\;\ldots\qquad X_3B_2=0,\;\ldots,$$

e le $\gamma_1\nu_4$:

$$X_1A_4=0,\qquad Y_1A_4=0,\;\ldots\qquad X_1B_4=0,\;\ldots.$$

Ma le relazioni (70) non sono tutte indipendenti, giacchè le equazioni identiche:

$$X_1(A_2B_2-A_2B_2)=0,\qquad Y_1(A_2B_2-A_2B_2)=0,\quad\ldots,$$

in numero $\frac{1}{2}\gamma_1\nu_2(\nu_2-1)$, conducono evidentemente a relazioni lineari fra i primi

membri delle equazioni (70). Così, le relazioni (71), (72) non sono tutte indipendenti, giacchè combinando le ν_2 relazioni: $A_2 = 0$, $B_2 = 0$, ... colle ν_3: $A_3 = 0$, $B_3 = 0$, ... si ottengono $\nu_2 \nu_3$ relazioni lineari fra i primi membri delle (71), (72). Quindi il numero delle relazioni lineari necessariamente esistenti fra i covarianti composti del quinto grado è il seguente:

$$\frac{1}{2 \cdot 3} \nu_2 \gamma_1 (\gamma_1 + 1)(\gamma_1 + 2) + \gamma_1 \gamma_2 \nu_2 + \frac{1}{2} \nu_3 \gamma_1 (\gamma_1 + 1) + \gamma_2 \nu_3 + \gamma_3 \nu_2 + \gamma_1 \nu_4$$
$$- \frac{1}{2} \gamma_1 \nu_2 (\nu_2 - 1) - \nu_2 \nu_3 ;$$

per cui, indicando con μ_5 il numero dei covarianti indipendenti, e con ν_5 quello delle nuove relazioni lineari, si avrà:

$$\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \gamma_1 (\gamma_1 + 1) \ldots (\gamma_1 + 4) + \frac{1}{2 \cdot 3} \gamma_2 \gamma_1 (\gamma_1 + 1)(\gamma_1 + 2) + \frac{1}{2} \gamma_1 \gamma_2 (\gamma_2 + 1)$$
$$+ \frac{1}{2} \gamma_3 \gamma_1 (\gamma_1 + 1) + \gamma_2 \gamma_3 + \gamma_1 \gamma_4 = \mu_5 + \nu_5 + \frac{1}{2 \cdot 3} \nu_2 \gamma_1 (\gamma_1 + 1)(\gamma_1 + 2)$$
$$+ \frac{1}{2} \nu_3 \gamma_1 (\gamma_1 + 1) + \gamma_2 \nu_3 + \gamma_3 \nu_2 + \gamma_1 \nu_4 - \frac{1}{2} \gamma_1 \nu_2 (\nu_2 - 1) - \nu_2 \nu_3 + \gamma_1 \gamma_2 \nu_2$$

e

$$\gamma_5 = C_5 - \mu_5 ;$$

ossia, sostituendo, si avrà:

$$(73) \left\{ \begin{aligned} \gamma_5 - \nu_5 = C_5 &- \frac{1}{2.3.4.5} \gamma_1 (\gamma_1 + 1) \ldots (\gamma_1 + 4) - \frac{1}{2.3} \gamma_1 (\gamma_1 + 1)(\gamma_1 + 2)(\gamma_2 - \nu_2) \\ &- \frac{1}{2} \gamma_1 (\gamma_1 + 1)(\gamma_3 - \nu_3) - \frac{1}{2} \gamma_1 (\gamma_2 - \nu_2)(\gamma_2 - \nu_2 + 1) \\ &- (\gamma_2 - \nu_2)(\gamma_3 - \nu_3) - \gamma_1 (\gamma_4 - \nu_4) . \end{aligned} \right.$$

2. Dalle equazioni (65), (66), (67), (69), (73), ponendo $\gamma_r - \nu_r = \alpha_r$, si deducono le seguenti:

$$C_1 = \alpha_1 ,$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \alpha_1 (\alpha_1 + 1) + \alpha_2 ,$$

$$C_3 = \frac{1}{2 \cdot 3} \alpha_1 (\alpha_1 + 1)(\alpha_1 + 2) + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_3 ,$$

. . . .

le quali si possono porre sotto la forma:

$$C_1 = \alpha_1,$$

$$2C_2 = C_1\alpha_1 + \alpha_1 + 2\alpha_2,$$

$$3C_3 = C_2\alpha_1 + C_1(\alpha_1 + 2\alpha_2) + \alpha_1 + 3\alpha_3,$$

$$4C_4 = C_3\alpha_1 + C_2(\alpha_1 + 2\alpha_2) + C_1(\alpha_1 + 3\alpha_3) + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_4,$$

$$5C_5 = C_4\alpha_1 + C_3(\alpha_1 + 2\alpha_2) + C_2(\alpha_1 + 3\alpha_3) + C_1(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_4) + \alpha_1 + 5\alpha_5.$$

. . . .

Ora, osservando che, posto

$$s_m = -\left[\alpha_1 + \alpha_2 E\left(\frac{m}{2}\right) + \alpha_3 E\left(\frac{m}{3}\right) + \dots + \alpha_r E\left(\frac{m}{r}\right) + \dots\right],$$

si hanno le

$$s_1 = -\alpha_1,$$

$$s_2 = -(\alpha_1 + 2\alpha_2),$$

$$s_3 = -(\alpha_1 + 3\alpha_3),$$

$$s_4 = -(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_4),$$

$$s_5 = -(\alpha_1 + 5\alpha_5),$$

$$s_6 = -(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 6\alpha_6),$$

. . . . ,

le equazioni superiori si ridurranno alle

$$C_1 + s_1 = 0,$$

$$2C_2 + C_1 s_1 + s_2 = 0,$$

$$3C_3 + C_2 s_1 + C_1 s_2 + s_3 = 0,$$

. . . .

Dal confronto di queste ultime equazioni colle (61), rammentando quanto si è dimostrato al n° 4 del Cap. V, si concepirà facilmente la sussistenza dell'equazione:

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha_1}(1-x^2)^{\alpha_2}(1-x^3)^{\alpha_3}\dots} = 1 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots$$

e, ponendo per α_1, α_2, ... i loro valori, si avrà:

$$(74)\qquad \frac{(1-x)^{\nu_1}(1-x^2)^{\nu_2}(1-x^3)^{\nu_3}\dots}{(1-x)^{\gamma_1}(1-x^2)^{\gamma_2}(1-x^3)^{\gamma_3}\dots} = 1 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots,$$

la quale stabilisce una singolare relazione (una delle più belle scoperte del sig. CAYLEY) fra i numeri dei covarianti indipendenti, dei covarianti irreducibili, e delle relazioni lineari fra i covarianti composti.

3. Il numero C_r essendo quello di tutti i covarianti indipendenti di grado r, per quanto si è dimostrato al Cap. IV, n° 6, sarà eguale a $Q\left(\frac{1}{2}nr,\ r,\ n\right)$ allorquando si considerino i soli invarianti di grado r, a $P\left(\frac{1}{2}nr,\ r,\ n\right)$ quando essendo nr pari si considera il numero totale degli invarianti e dei covarianti di grado r, ed a $P\left[\frac{1}{2}(nr-1),\ r,\ n\right]$ quando essendo nr dispari si considera il numero totale dei covarianti di grado r. Ora, essendo (Cap. IV, n° 5):

$$Q\left(\tfrac{1}{2}nr,\ r,\ n\right) = \text{coefficiente di } x^n \text{ in } \frac{U(x)}{V(x)},$$

ponendo questa frazione sotto la forma del primo membro della (74) si otterranno ad un tratto, e il numero degli invarianti irreducibili, e quello delle relazioni lineari fra gli invarianti composti. Analogamente dicasi per le altre due espressioni:

$$P\left(\tfrac{1}{2}nr,\ r,\ n\right),\qquad P\left[\tfrac{1}{2}(nr-1),\ r,\ n\right].$$

Considerando la Tabella **A** del Cap. V, rammentando essere $Q\left(\frac{1}{2}nr,\ r,\ n\right)$ il numero degli invarianti indipendenti di grado r della forma di grado n, ed anche il numero degli invarianti indipendenti di grado n della forma di grado r, si avrà che per la forma quadratica il numero degli invarianti indipendenti di grado n è eguale al coefficiente di x^n in

$$A(2) = \frac{1}{1-x^2},$$

e quindi per la (74) la forma quadratica ha un invariante irreducibile del secondo grado, cioè il discriminante. Così, essendo

$$A(3) = \frac{1}{1-x^4},$$

la forma cubica ha un invariante irreducibile del quarto grado (il discriminante).

Le espressioni $A(4)$, $A(5)$, $A(6)$ dimostrano che la forma biquadratica ha due invarianti irreducibili, l'uno di secondo, l'altro di terzo grado; che la forma di quinto grado ha quattro invarianti irreducibili dei gradi 4, 8, 12, 18, legati fra loro da una

equazione del 36° grado; e che la forma del sesto grado ha cinque invarianti dei gradi **2**, 4, 6, 10, 15 legati da una equazione del 30° grado.

Il numeratore di $A(7)$, nel quale si ponga x in luogo di x^2, confrontato colla espressione

$$1 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_m x^m$$

dà

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 [illegible] = -1, \quad C_4 [illegible] 2, \quad C [illegible] = -1, \quad \ldots \quad C [illegible] 1;$$

quindi dalle formole (61), Cap. V, si avranno le

$$s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = 3, \quad s_4 = -8, \quad [illegible] 5, \quad [illegible] = -27, \quad [illegible] -28,$$

$$s [illegible] = -24, \quad [illegible] = -78, \quad \text{ecc.},$$

per le quali:

$$s_m = E\left(\frac{m}{3}\right) + E\left(\frac{m}{5}\right) + E\left(\frac{m}{10}\right) + [illegible] E\left(\frac{m}{12}\right) + 25 E\left(\frac{m}{13}\right) + 20 E\left(\frac{m}{14}\right)$$

$$+ 49 E\left(\frac{m}{15}\right) + 37 E\left(\frac{m}{16}\right) + 19 E\left(\frac{m}{17}\right) + 27 E\left(\frac{m}{18}\right) + \ldots$$

$$- 2 E\left(\frac{m}{4}\right) - 5 E\left(\frac{m}{6}\right) - 4 E\left(\frac{m}{[illegible]}\right) - 2 E\left(\frac{m}{8}\right) - 9 E\left(\frac{m}{9}\right) - E\left(\frac{m}{11}\right)$$

$$- 107 E\left(\frac{m}{19}\right) - 130 E\left(\frac{m}{20}\right) - \ldots$$

ed il numeratore di $A(7)$ eguaglierà la frazione

$$\frac{(1 - x^{[illegible]})(1 - x^{[illegible]})(1 - x^{[illegible]}) [illegible] \ldots}{(1 - x^{[illegible]})^2 (1 - x^{[illegible]}) [illegible] (1 - x^{[illegible]}) \ldots},$$

nella quale il numero dei fattori del numeratore e del denominatore è infinito. Si avrà in conseguenza:

$$A(7) = \frac{(1-x^2)(1-x^{[illegible]}) [illegible] \ldots}{(1-x^4)(1-x^8)^3(1-x^{12})^6(1-x^{14})^4(1-x^{16})^2(1-x^{18})^9(1-x^{22})(1-x^{38})^{107} \ldots},$$

cioè: *il numero degli invarianti irreducibili per la forma di settimo grado è infinito.* Essi saranno uno del quarto, tre dell'ottavo, sei del dodicesimo, ecc.

4. Abbiamo dimostrato al n° 6 del Cap. precedente che pel caso di nr pari il numero totale dei covarianti e degli invarianti di grado r della forma dell'ennesimo grado è $P(\frac{1}{2}nr, r, n)$; e nel caso di nr dispari il numero totale dei covarianti di grado r è $P\left[\frac{1}{2}(nr-1), r, n\right]$. Ora, supponendo n dispari, nr sarà pari o dispari, secondo

che r sarà pari o dispari; quindi per una forma di grado dispari il numero totale degli invarianti e dei covarianti irreducibili verrà dato dalla formola

$$P\left(\tfrac{1}{2} n r,\ r,\ n\right) + P\left[\tfrac{1}{2}(n r - 1),\ r,\ n\right].$$

Dalle Tabelle **N**, **P** avremo che quel numero pel caso di n pari sarà dato dalla formola

$$P\left(\tfrac{1}{2} n r,\ r,\ n\right) = \text{coefficiente di } x^r \text{ in } N(n),$$

e pel caso di n dispari dalla

$$P\left(\tfrac{1}{2} n r,\ r,\ n\right) + P\left[\tfrac{1}{2}(n r - 1),\ r,\ n\right] = \text{coefficiente di } x^r \text{ in } N(n) + P(n).$$

Dalla

$$N(2) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$$

deduciamo che: *le forme quadratiche hanno due covarianti irreducibili, l'uno di primo grado, l'altro di secondo grado;* il primo è la forma stessa, il secondo il discriminante. La

$$N(3) + P(3) = \frac{1+x^4}{(1-x^2)^2(1-x^4)} + \frac{x}{(1-x^2)^3} = \frac{1-x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

dimostra che: *le forme cubiche hanno quattro covarianti irreducibili dei gradi primo, secondo, terzo e quarto, legati fra loro da una equazione del sesto grado.* Il covariante del quarto grado è il discriminante. Così, dalla

$$N(4) = \frac{1-x^6}{(1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^2}$$

si ha che: *la forma del quarto grado ha cinque covarianti irreducibili legati da una equazione del sesto grado.* Così, per quanto si è dimostrato al n° precedente, la forma biquadratica ha tre covarianti irreducibili dei gradi 1°, 2°, 3° e due invarianti irreducibili dei gradi 2°, 3°.

Il numeratore della $N(5) + P(5)$ posto a confronto colla espressione

$$1 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_{16} x^{16}$$

dà luogo alle

$$C_1 = 1, \quad C_2 = 1, \quad C_3 = 4, \quad C_4 = 6, \quad C_5 = 8, \quad \ldots \quad C_{16} = 1,$$

per le quali:

$$s_n = 5E\left(\frac{m}{6}\right) + 3E\left(\frac{m}{7}\right) + 7E\left(\frac{m}{8}\right) + E\left(\frac{m}{9}\right) + 13E\left(\frac{m}{13}\right) + 48E\left(\frac{m}{14}\right) + \ldots$$

$$- 1 - 3E\left(\frac{m}{3}\right) - 2E\left(\frac{m}{4}\right) - 2E\left(\frac{m}{5}\right) - 9E\left(\frac{m}{10}\right) - 19E\left(\frac{m}{11}\right) - 14E\left(\frac{m}{12}\right) - \ldots.$$

Si avrà quindi:

$$N(5)+P(5) = \frac{(1-x^{[illegible]})(1-x^{[illegible]})(1-x^{[illegible]})(1-x^{[illegible]})(1-x^{[illegible]})(1-x^{[illegible]})\ldots}{(1-x)(1-x^{[illegible]})(1-x^{[illegible]})(1-x^{[illegible]})(1-x^{[illegible]})(1-x^{[illegible]})(1-x^{[illegible]})(1-x^{[illegible]})\ldots}$$

ed essendo infinito il numero dei fattori nel numeratore e nel denominatore di questa frazione, *sarà infinito il numero dei covarianti irreducibili di una forma del quinto grado.* Essi sono: uno del primo grado, due del secondo, tre del terzo, tre del quarto (compreso l'invariante), due del quinto, ecc.

CAP. VII. — Delle forme quadratiche, cubiche, biquadratiche.

1. Abbiamo dimostrato al Cap. I, n° 2, che l'Hessiano di una forma qualunque è un covariante della medesima. Considerando la forma

$$u = (a_0, a_1, \ldots a_n)(x, y)^n,$$

si avrà quindi che l'Hessiano

$$h = \frac{1}{n^2(n-1)^2} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{vmatrix} = (a_0 a_2 - a_1^2) x^{2n-4} + \ldots$$

è un covariante di secondo grado e dell'ordine $2(n-2)$ della forma u. Un secondo covariante di u si ha dall'espressione (Cap. I, n° 3):

$$\theta = \frac{1}{n(n-2)} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{vmatrix} = (a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3) x^{3n-6} + \ldots;$$

esso sarà del terzo grado e dell'ordine $3(n-2)$.

Ponendo

$$u\left(xX - \frac{1}{n}\frac{\partial u}{\partial y} Y,\ yX + \frac{1}{n}\frac{\partial u}{\partial x} Y\right) = (u_0, u_1, u_2, \ldots u_n)(X, Y)^n,$$

si avrà per quanto si è dimostrato al n° 3 del Cap. II che

$$u^2 h = u_0 u_2 - u_1^2, \qquad u^3 \theta = u_0^2 u_3 - 3 u_0 u_1 u_2 + 2 u_1^3;$$

ossia, essendo $u_0 = u$, $u_1 = 0$, si avranno le

$$u_2 = u h, \qquad u_3 = u\theta.$$

2. Una forma quadratica ha un covariante di primo grado (la forma stessa) ed un invariante del secondo grado (l'Hessiano od il discriminante); ossia:

$$u = (a_0, a_1, a_2)(x, y)^2, \qquad h = \delta = a_0 a_2 - a_1^2.$$

Una forma cubica ha tre covarianti irreducibili dei gradi primo, secondo e terzo, ed un invariante di quarto grado (il discriminante). Essi sono (n° 1):

$$u = (a_0, a_1, a_2, a_3)(x, y)^3,$$

$$h = \left(a_0 a_2 - a_1^2,\ \tfrac{1}{2}(a_0 a_3 - a_1 a_2),\ a_1 a_3 - a_2^2\right)(x, y)^2,$$

$$\theta = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)(x, y)^3,$$

essendo

$$(75)\qquad \begin{cases} \alpha_0 = a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3, \\ \alpha_1 = a_0 a_1 a_3 - 2 a_0 a_2^2 + a_1^2 a_2, \\ \alpha_2 = - a_0 a_2 a_3 + 2 a_1^2 a_3 - a_1 a_2^2, \\ \alpha_3 = - a_0 a_3^2 + 3 a_1 a_2 a_3 - 2 a_2^3, \end{cases}$$

ed il discriminante:

$$\delta = a_0^2 a_3^2 + 4 a_0 a_2^3 + 4 a_1^3 a_3 - 6 a_0 a_1 a_2 a_3 - 3 a_1^2 a_2^2.$$

Indicando con $u_0 = u$, $u_1 = 0$, u_2, u_3 i covarianti associati al covariante u, si otterranno come nel n° 1 le

$$u_2 = u h, \qquad u_3 = u\theta;$$

inoltre si avrà:

$$u^5 \delta = u\, u_3^2 + 4 u_2^3.$$

Eliminando da queste tre equazioni le u_2, u_3, si otterrà l'equazione del sesto grado, la quale, come si è dimostrato nel Cap. precedente, lega fra loro le funzioni u, h, θ, δ. Essa risulta:

$$(76)\qquad 4 h^3 - u^2 \delta = - \theta^2.$$

Una forma biquadratica ha tre covarianti irreducibili dei gradi primo, secondo e terzo, e due invarianti irreducibili dei gradi secondo e terzo.

Dal n° 1 si hanno i covarianti:

servando che (n° 2)

$$\delta = - \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2} \end{vmatrix},$$

si avrà $\Delta = \gamma^2 \delta$. Ora fra i covarianti U, H, Θ ed il discriminante Δ si ha, analogamente alla (76), la relazione:

$$4 H^3 - U^2 \Delta = - \Theta^2,$$

la quale per la sostituzione dei valori superiori riducesi alla

$$4 \gamma^3 h^3 - (a u + b \theta)^2 \gamma^2 \delta = - (\alpha u + \beta \theta)^2,$$

e per la (76):

$$\gamma^3 (u^2 \delta - \theta^2) - \gamma^2 \delta (a u + b \theta)^2 = - (\alpha u + \beta \theta)^2.$$

Considerando questa equazione come identica, dal confronto dei coefficienti delle analoghe potenze e prodotti di u, θ si deducono:

$$\alpha^2 = \gamma^2 \delta (a^2 - \gamma), \qquad \beta^2 = \gamma^2 (\delta b^2 + \gamma), \qquad \alpha \beta = \gamma^2 \delta a b,$$

dalle quali, eliminando le α, β, ottiensi:

$$\gamma = a^2 - \delta b^2;$$

inoltre si hanno:

$$\alpha = \gamma \delta b, \qquad \beta = \gamma a;$$

quindi:

$$H = (a^2 - \delta b^2) h, \quad \Theta = (a^2 - \delta b^2)(\delta b u + a \theta), \quad \Delta = (a^2 - \delta b^2)^2 \delta.$$

Supponiamo $a = 0$, $b = 1$, ossia

$$U = \varphi = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)(x, y)^3,$$

nella quale le α_0, α_1, α_2, α_3 hanno i valori (75). Ora dalle

$$H = - \delta h, \qquad \Theta = - \delta^2 u$$

si hanno le singolari relazioni:

$$\alpha_0 \alpha_2 - \alpha_1^2 = - \delta (a_0 a_2 - a_1^2),$$

$$\alpha_0 \alpha_3 - \alpha_1 \alpha_2 = - \delta (a_0 a_3 - a_1 a_2),$$

$$\alpha_1 \alpha_3 - \alpha_2^2 = - \delta (a_1 a_3 - a_2^2),$$

$$4(a\beta - b\alpha) = \varphi(a, b), \qquad \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial a} + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial b} = 0,$$

$$S = -4\frac{a\dfrac{\partial\varphi(\alpha, \beta)}{\partial\alpha} + b\dfrac{\partial\varphi(\alpha, \beta)}{\partial\beta}}{\varphi(a, b)}, \qquad T = -4\frac{\varphi(\alpha, \beta)}{\varphi(a, b)}.$$

Le prime due dànno evidentemente:

$$\alpha = -\frac{1}{12}\frac{\partial\varphi}{\partial b}, \qquad \beta = \frac{1}{12}\frac{\partial\varphi}{\partial a}.$$

Inoltre, osservando che dalla forma cubica $\varphi(a, b)$ si ha:

$$\varphi\left(aX - \frac{1}{3}\frac{\partial\varphi}{\partial b}Y, \quad bX + \frac{1}{3}\frac{\partial\varphi}{\partial a}Y\right) = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)(X, Y)^3,$$

nella quale $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sono covarianti associati al covariante φ, e quindi (n° 2), indicando con h_1, θ_1 i covarianti del secondo e terzo ordine della forma stessa, sono

$$\varphi_0 = \varphi, \qquad \varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = \varphi h_1, \qquad \varphi_3 = \varphi\theta_1,$$

pei valori di α, β si avranno le

$$\varphi_3 = 64\,\varphi(\alpha, \beta) = \varphi\theta_1, \qquad \varphi_2 = \frac{16}{3}\left(a\frac{\partial\varphi(\alpha, \beta)}{\partial\alpha} + b\frac{\partial\varphi(\alpha, \beta)}{\partial\beta}\right) = \varphi h_1,$$

ed in conseguenza:

$$S = -\frac{3}{4}h_1, \qquad T = -\frac{1}{16}\theta_1,$$

ossia, formando i valori di h_1, θ_1,

$$S = s a^2 + 3 t a b + \frac{1}{12} s^2 b^2,$$

$$T = t a^3 + \frac{1}{6} s a^2 b + \frac{1}{4} s t a b^2 + \frac{1}{216}(54 t^2 - s^3) b^3.$$

4. Il covariante θ del n° 1 è eguale a

$$\theta = \frac{1}{n(n-2)y}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & y\dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial h}{\partial x} & y\dfrac{\partial h}{\partial y} \end{vmatrix},$$

ossia, aggiungendo agli elementi dell'ultima colonna quelli della prima moltiplicati per x:

5. Ponendo $x = 1$, $y = 0$ nella equazione (76) o nella

$$\Theta^2 - u^2\delta = -4h^3,$$

si ha

$$(a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3)^2 - a_0^2\delta = -4(a_0 a_2 - a_1^2)^3.$$

Sieno z_1, z_2 le radici della equazione

$$z^2 - \delta = 0; \tag{79}$$

essendo

$$z^2 - \delta = (z - z_1)(z - z_2),$$

si avrà

$$\alpha_0^2 - a_0^2\delta = (\alpha_0 - a_0 z_1)(\alpha_0 - a_0 z_2);$$

quindi, se $\alpha_0 = a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3$, sarà

$$(\alpha_0 - a_0 z_1)(\alpha_0 - a_0 z_2) = -4(a_0 a_2 - a_1^2)^3.$$

Ora, indicando con x_1, x_2, x_3 le radici della equazione cubica $u(x, 1) = 0$, si ha facilmente:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_2 x_3 - x_3 x_1 - x_1 x_2 = -\frac{9}{a_0^2}(a_0 a_2 - a_1^2),$$

ossia, se rappresentasi con ω una radice immaginaria cubica dell'unità,

$$(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)(x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3) = -\frac{9}{a_0^2}(a_0 a_2 - a_1^2);$$

dunque sostituendo:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}(\alpha_0 - a_0 z_1)}\sqrt[3]{\frac{1}{2}(\alpha_0 - a_0 z_2)} = \frac{a_0^2}{9}(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)(x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3),$$

la quale è soddisfatta supponendo

$$x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 = \frac{3}{a_0}\sqrt[3]{\frac{1}{2}(\alpha_0 - a_0 z_1)},$$

$$x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3 = \frac{3}{a_0}\sqrt[3]{\frac{1}{2}(\alpha_0 - a_0 z_2)},$$

ed aggiungendo a queste la

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{3}{a_0}a_1,$$

la quale è soddisfatta ponendo

$$x_3 + x_4 - x_1 - x_2 = \frac{4}{a_0} \sqrt{a_0 z_1 - (a_0 a_2 - a_1^2)},$$

$$x_2 + x_4 - x_1 - x_3 = \frac{4}{a_0} \sqrt{a_0 z_2 - (a_0 a_2 - a_1^2)},$$

$$x_2 + x_3 - x_1 - x_4 = \frac{4}{a_0} \sqrt{a_0 z_3 - (a_0 a_2 - a_1^2)}.$$

Queste equazioni colla

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{4 a_1}{a_0}$$

sono sufficienti a determinare i valori di x_1, x_2, x_3, x_4 in funzione delle z_1, z_2, z_3. La equazione (80) è quindi una risolvente della equazione del quarto grado.

[G.].

FINE DEL TOMO PRIMO.